

DLR-IB-FA-BS-2019-28

**Graphische Benutzeroberfläche für
das Versagenskriterium nach Cuntze für den dreidimensionalen Fall**

Wissenschaftlicher Bericht

Jan-Lukas Stüven



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**



Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

DLR-IB-FA-BS-2019-28

**Graphische Benutzeroberfläche für das
Versagenskriterium nach Cuntze für den
dreidimensionalen Fall**

Zugänglichkeit:

Stufe 2 DLR intern zugänglich

Braunschweig, *Januar, 2019*

Abteilungsleiter:


Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne



Der Bericht umfasst: 78 Seiten

Autor:

Jan-Lukas Stüven



Betreuer:

Josef Koord



DLR

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt

Inhaltsverzeichnis

I. Dokumenteigenschaften.....	4
II. Abkürzungsverzeichnis	5
III. Abbildungsverzeichnis	7
IV. Tabellenverzeichnis	10
1. Einleitung.....	11
2. Das Versagenskriterium nach Cuntze.....	12
2.1. Cuntze Failure Mode Concept (CFMC).....	12
2.2. Invariantenschreibweise.....	12
2.3. Versagensarten nach Cuntze	13
2.4. Innere Reibung.....	15
2.5. Interaktion der Versagensmodi	16
2.6. Bestimmung der Cuntze Parameter.....	16
3. Elemente der Benutzeroberfläche	18
3.1. Eingabe von Materialdaten	19
3.2. Berechnung der Materialanstressungen	20
3.3. Darstellung der Bruchkurven.....	20
3.4. Eingabe experimenteller Daten	21
3.4.1. Überprüfung von benutzerdefinierten Spannungskombinationen	21
3.4.2. Curve-fitting und Buttons.....	23
3.5. Darstellung des Bruchkörpers	24
4. Implementierung des Cuntze Kriteriums in 3D.....	26
4.1. Formulierung in Python	26
4.2. Erstellung der Bruchkurven	26
4.2.1. Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$	27
4.2.2. Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$	29
4.2.3. Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$	32
4.2.4. Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$	35
4.2.5. Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$	38
4.3. Berechnung von Schnittpunkten, Anstressungen und Reservefaktoren.....	43
4.3.1. Berechnung für Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$	44
4.3.2. Berechnung für Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$	46
4.3.3. Berechnung für Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$	48
4.3.4. Berechnung für Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$	51

4.3.5. Berechnung für Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$	51
4.4. Erstellung des Bruchkörpers.....	58
5. Zusammenfassung	59
V. Literaturverzeichnis.....	61
Anhang A - Bruchkurven	62
Anhang B - Schnittpunkte	71
Anhang C - Bruchkörper	77

I. Dokumenteigenschaften

Titel	Graphische Benutzeroberfläche für das Versagenskriterium nach Cuntze für den dreidimensionalen Fall
Betreff	-
Institut	FA-FLB
Erstellt von	Jan-Lukas Stüven
Beteiligte	Josef Koord
Geprüft von	Josef Koord
Freigabe von	-
Datum	Oktober – Dezember 2018
Version	1.0
Dateipfad	-

II. Abkürzungsverzeichnis

i. Begriffe:

CFMC	Cuntze Failure Mode Concept
FF	Fibre-Failure (Faserbruch)
FVV	Faserverbundwerkstoff
GUI	Graphical User Interface
IFF	Inter-Fibre-Failure (Zwischenfaserbruch)
MfFD	Multi-fold Failure Domain
MiFD	Mixed Failure Domain
UD	Unidirektional
WWFE	World-Wide Failure Exercise

ii. Lateinische Buchstaben:

Symbol	Einheit	Bedeutung
b	[-]	Verschiebungskonstante einer Geraden
b	[-]	Modellparameter der inneren Reibung
E	[MPa]	Elastizitätsmodul
Eff	[-]	Materialanstrengung
f	[-]	Reservefaktor
I		Spannungsinvarianten
m	[-]	Interaktionsexponent
m	[-]	Steigung einer Geraden
$R_{ }^t$	[MPa]	Zugfestigkeit in Faserrichtung
$R_{ }^c$	[MPa]	Druckfestigkeit in Faserrichtung
R_{\perp}^t	[MPa]	Zugfestigkeit quer zur Faserrichtung
R_{\perp}^c	[MPa]	Druckfestigkeit quer zur Faserrichtung
$R_{\perp }$	[MPa]	Schubfestigkeit

iii. Griechische Buchstaben:

Symbol	Einheit	Bedeutung
ε	[-]	Dehnung
μ	[-]	Modellparameter der inneren Reibung
σ	[MPa]	Normalspannung
τ	[MPa]	Schubspannung
φ	[%]	Faservolumengehalt

iv. Indizes:

Symbol	Bedeutung
$(\dots)_{\parallel}$	In Faserrichtung
$(\dots)_{\perp}$	Senkrecht zur Faserrichtung
$(\dots)^{\sigma}$	Versagen dominiert von Normalspannung
$(\dots)^{\tau}$	Versagen dominiert von Schubspannung
(\dots)	Durchschnittswert
$(\dots)^{(\text{Modus})}$	Einzelner Modus
$(\dots)^{(\text{res})}$	Resultierende aller Modi

III. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2–1 Spannungen an einem dreidimensionalen Volumenelement im Laminatkoordinatensystem [4].....	13
Abbildung 2–2 Versagensmodi eines transversal isotropen Materials unter dreidimensionaler Last [9].....	14
Abbildung 3–1 Darstellung der oberen Hälfte des Tools „3D Cuntze Failure Mode Concept“ ..	18
Abbildung 3–2 Darstellung des gesamten Tools „3D Cuntze Failure Mode Concept“ am Beispiel von T700/M21.....	19
Abbildung 3–3 Materialeingabe über die Datenbank oder manuell.....	20
Abbildung 3–4 Reiter zum Wechseln des Bruchkurvenfensters, Zoom-Fenster, Buttons und Dateneingabe.....	21
Abbildung 3–5 Überprüfung einer akzeptablen Belastung am Beispiel von T700/M21 ($\sigma_{1,E} = 1800$ MPa, $\tau_{21,E} = 80$ MPa und $m = 3,1$).....	22
Abbildung 3–6 Überprüfung einer zu großen Belastung am Beispiel von T700/M21 ($\sigma_{1,E} = 2000$ MPa, $\tau_{21,E} = 150$ MPa und $m = 3,1$).....	22
Abbildung 3–7 Neues Fenster mit dem aktuellen Graphen und einigen Daten zur Identifizierung	23
Abbildung 3–8 Auswahl eines Speicherordners für den zu speichernden Graphen	24
Abbildung 3–9 Darstellung des Bruchkörpers in der Ausgangsform am Beispiel T700/M21.....	24
Abbildung 3–10 Darstellung des Bruchkörpers am Beispiel T700/M21 in einer aus der Ausgangslage gedrehten Position mit allen eingeblendeten Schnittebenen durch den Ursprung.....	25
Abbildung 4–1 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ des Materiales T300/BSL914C epoxy [12] mit Interaktions-exponent $m = 3,1$; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(1,t) = 1500$ MPa, $R(1,c) = 900$ MPa, $R(2,1) = 80$ MPa)	29
Abbildung 4–2 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ nach Cuntze des Materiales T300/BSL914C epoxy mit Inter-aktionsexponent $m = 3,1$; [4].	29

Abbildung 4–3 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ des Materiales E-glass/LY556 epoxy [12] mit Interaktions-exponent $m = 3,1$, und $b_{21} = 0,13$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; im zweiten Quadranten liegen beide Kurven übereinander; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa, $R(2,1) = 72$ MPa) 31

Abbildung 4–4 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ des Materiales E-glass/LY556 epoxy [12] im ersten Quadranten mit Interaktionsexponent $m = 2$, und $b_{21} = 0,13$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa, $R(2,1) = 72$ MPa) 31

Abbildung 4–5 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ und $\tau_{31}(\sigma_2)$ nach Cuntze des Materiales E-glass/LY556 epoxy mit Interaktionsexponent $m = 3,1$, und $b_{21} = 0,13$ [4]..... 32

Abbildung 4–6 Gesamte Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ des Materiales E-glass/MY750 epoxy [12] mit Inter-aktionsexponent $m = 3,1$; in blau die angepasste, in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(1,t) = 1280$ MPa, $R(1,c) = 800$ MPa, $R(2,t) = 40$ MPa, $R(2,c) = 145$ MPa)..... 34

Abbildung 4–7 Erster und zweiter Quadrant der Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ des Materials E-glass/MY750 epoxy [12] mit Interaktionsexponent $m = 3,1$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeit ($R(1,t) = 1280$ MPa, $R(1,c) = 800$ MPa, $R(2,t) = 40$ MPa, $R(2,c) = 145$ MPa) 34

Abbildung 4–8 Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ nach Cuntze des Materiales E-glass/MY750 epoxy mit Inter-aktionsexponent $m = 3,1$; [4] 35

Abbildung 4–9 Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ am Beispiel E-glass/LY556 epoxy [12] mit Interaktions-exponenten $m = 2$ und $b_{22} = 1,5$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa, $R(2,1) = 72$ MPa; für $m = 2$ ergibt sich der Schnittpunkt mit der Ordinate zu 25,74 MPa) 36

Abbildung 4–10 Auszug der Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ des Materials E-glass/LY556 epoxy [12] aus dem Excel-Tool von Petersen und Schollenberger [10] für einen Interaktionsexponenten $m = 2$ und $b_{22} = 1,5$ 38

Abbildung 4–11 Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$ am Beispiel E-glass/LY556 epoxy [12] mit Interaktions-exponenten $m = 3,1$ und $b_{22} = 1,5$; in blau die Kurve mit einzelnen Anstrengungen, in rot die Kurve mit kombinierten Anstrengungen und in grün die nicht angepasste Kurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa) 41

Abbildung 4–12 Bruchkurve $\sigma_3(\sigma_2)$ ($\equiv \sigma_2(\sigma_3)$ wegen Symmetrie) aus [9] mit Interaktions-exponenten $m = 2,6$, $b_{22} = 1,27$, $R(1,t) = 2230$ MPa, $R(1,c) = 1537$ MPa, $R(2,t) = 71$ MPa, $R(2,c) = 202$ MPa..... 42

Abbildung 4–13 Schematische Bruchkurve $\sigma_3(\sigma_2) (\equiv \sigma_2(\sigma_3))$ wegen Symmetrie) aus [4] 42

Abbildung 4–14 Skizzenhafte Darstellung des geometrischen Verfahrens zur Schnittpunktberechnung. Die blaue Kurve symbolisiert die Bruchkurve, die rote Gerade stellt die bis zur Festigkeit verlängerte Gerade (verlängerter Ortsvektor der Spannungscombination) dar. 47

Abbildung 4–15 Darstellung des Bruchkörpers am Beispiel T700/M21 in der gestauchten Ausgangsform oben; mit gleichen Achsenabschnitten unten..... 59

IV. Tabellenverzeichnis

Tabelle 4–1 Formulierung der Parameter in der neuen Schreibweise für die Implementierung in Python	26
Tabelle 4–2 Übersicht über die Lösungsmethoden zur Berechnung der einzelnen Bruchkurven	27
Tabelle 4–3 Anstrengungen für verschiedene Spannungswerte und Vorzeichen	33
Tabelle 4–4 Übersicht über die Lösungswege zur Bestimmung des Schnittpunktes mit der Bruchkurve.....	43

1. Einleitung

Dieser Bericht fungiert als Dokumentation zu der in Python entwickelten graphischen Benutzeroberfläche (engl. Graphical User Interface, GUI) zum „3D Cuntze Failure Mode Concept“ Tool sowie der enthaltenen Elemente und Funktionen.

Das Programm implementiert das Versagenskriterium nach Cuntze für den dreidimensionalen Lastfall und soll einige Funktionen aufweisen, die im Vorfeld festgelegt werden. Die Wichtigsten sind hier kurz aufgeführt:

- Manuelle Eingabe von Materialdaten sowie Möglichkeit zur Auswahl von Materialdaten aus einer Datenbank.
- Berechnung von Anstrengungen für die einzelnen Modi sowie der Gesamtanstrengung für benutzerdefinierte Spannungstensoren.
- Darstellung der aus den Materialkennwerten abgeleiteten Bruchkurven und des Bruchkörpers.
- Möglichkeit zur Visualisierung experimenteller Datenpunkte in den Bruchkurven.
- Curve-fitting der Datenpaare zur Berechnung des idealen Interaktionsexponenten.
- Graphische und analytische Versagensüberprüfung einer benutzerdefinierten Spannungs-kombination im Diagramm der Bruchkurve sowie durch Berechnung der Anstrengung und des Reservefaktors.
- Direkter Vergleich von mehreren Graphen nebeneinander.
- Bereitstellung von visuellen Hilfsmitteln und Tooltips.

In den nächsten Abschnitten werden diese Funktionen genauer beschrieben. Außerdem werden die Herleitungen von Formeln aufgezeigt, um den Zusammenhang zwischen Eingabe und Ergebnis nachvollziehen zu können.

2. Das Versagenskriterium nach Cuntze

Faserverbundwerkstoffe (FVW) zählen zu den neueren Materialien unserer Zeit. Sie bestehen aus vielen dünnen Fasern und einer sie umschließenden Matrix. Das Materialverhalten ist wegen des Fasercharakters anisotrop bzw. transversal isotrop für eine unidirektionale (UD) Lage. Diese Eigenschaft führt dazu, dass FVW, im Gegensatz zu homogenen Materialien, viel stärker auf Veränderungen im Fertigungsprozess reagieren. Außerdem kommt es zu einer größeren Streuung von Materialkennwerten. Aus diesen beiden Tatsachen folgt, dass die Beschreibung der Versagensmechanismen und die Vorhersage von Materialversagen erschwert werden [9].

Es gibt, aufgrund der kurzen Entwicklungsgeschichte und des Fehlens einer alle Einflüsse berücksichtigenden Theorie, viele verschiedene Versagenskriterien für FVW [10]. Diese können zum Beispiel im Hinblick auf ihre Herangehensweise (mathematisch/physikalisch) oder Genauigkeit (pauschal/differenzierend) eingeteilt werden. Viele dieser Kriterien werden in der „World-Wide Failure Exercise“ (WWFE) überprüft, um herauszufinden, welches Modell die genauesten Vorhersagen treffen kann. Das Ziel der WWFE ist es, eine objektive Beurteilung der Kriteriengüte zu erhalten und den Wissensaustausch zu fördern [5]. Das Versagenskriterium von Cuntze hat sowohl in der WWFE-I (erste WWFE, 2D) als auch in WWFE-II (zweite WWFE, 3D) gute Ergebnisse erzielt [10].

2.1. Cuntze Failure Mode Concept (CFMC)

Das Besondere an Cuntzes Failure Mode Concept ist der strikte Zusammenhang zwischen einem partiellen Versagenskriterium und dem zugehörigen Versagensmodus bzw. der hauptverantwortlichen Spannung (vgl. Abschnitt 2.3.), also die klare Trennung der Versagensmodi. In einem Versagensmodus können dabei auch mehrere Spannungen miteinander interagieren. Jede äquivalente Spannung, also aus den Grundspannungen kombiniert, wird in einem Modus auf jeweils nur eine Festigkeit bezogen (vgl. Abschnitt 2.3.) [4].

2.2. Invariantenschreibweise

Der Vorteil der Invariantenschreibweise ist der, dass die Anstrengungsformulierungen nicht von einem Koordinatensystem abhängig sind [4]. Im Gegensatz zu isotropem Material, bei dem zwei Invarianten ausreichen, um die Verformung und Verzerrung eines Körpers zu beschreiben, werden fünf Invarianten für die Beschreibung eines transversal isotropen Körpers benötigt. Der Grund dafür liegt in der Anzahl der möglichen Versagensformen. Aus einer großen Auswahl verschiedener Invarianten hat sich Cuntze in [2] und [4] für die von Boehler aufgestellten Invarianten [1] entschieden, da diese seiner Ansicht nach das Materialverhalten am besten beschreiben. Die Invarianten sind in den Gleichungen 1a-e dargestellt.

$$I_1 = \sigma_1 \quad (1a-e)$$

$$I_2 = \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_3 = \tau_{21}^2 + \tau_{31}^2$$

$$I_4 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2$$

$$I_5 = (\sigma_2 - \sigma_3)(\tau_{31}^2 - \tau_{21}^2) - 4\tau_{23}\tau_{31}\tau_{12}$$

Dabei bezeichnet der Spannungsindex 1 die Faserrichtung, Spannungsindex 2 die Richtung quer zur Faserrichtung und Spannungsindex 3 die Dickenrichtung (vgl. Abbildung 2–1).

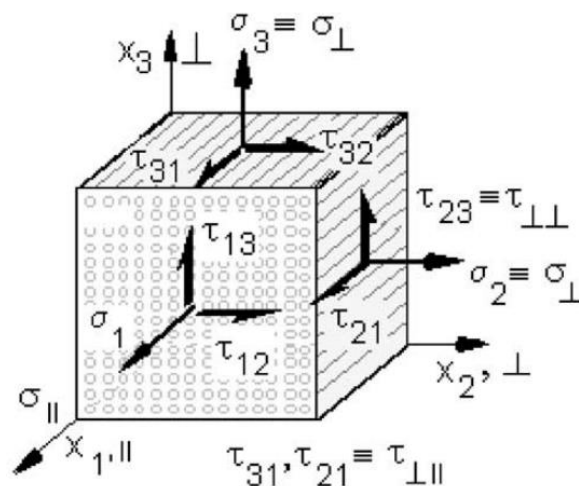


Abbildung 2-1 Spannungen an einem dreidimensionalen Volumenelement im Laminatkoordinatensystem [4]

2.3. Versagensarten nach Cuntze

Wie bereits in Abschnitt 2.2. erwähnt, werden fünf Invarianten für fünf Versagensformen benötigt. Bei den Versagensformen werden grundsätzlich zwei verschiedene Brucharten unterschieden: der Faserbruch (engl. Fibre-Failure, FF), bei dem die Fasern des FVW versagen und der Zwischenfaserbruch (engl. Inter-Fibre-Failure, IFF), bei dem die Matrix, bzw. die Interphase zwischen Faser und Matrix versagt [4]. Es ist anzumerken, dass bei einem FF normalerweise ein finaler Bruch, also vollständiges Versagen, vorliegt, bei einem IFF allerdings nur der Schädigungsbeginn erfolgt. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass ein IFF zu einem finalen Bruch führt [4]. Des Weiteren kann nach der für das Versagen verantwortlichen Spannung unterschieden werden. So existiert die Differenzierung zwischen durch Normalspannungen (engl. normal stress induced normal failure, NF) und durch Schubspannung (engl. shear stress induced shear failure, SF) erfolgtes Versagen [4]. Die Versagensmodi sind in Abbildung 2–2 dargestellt.

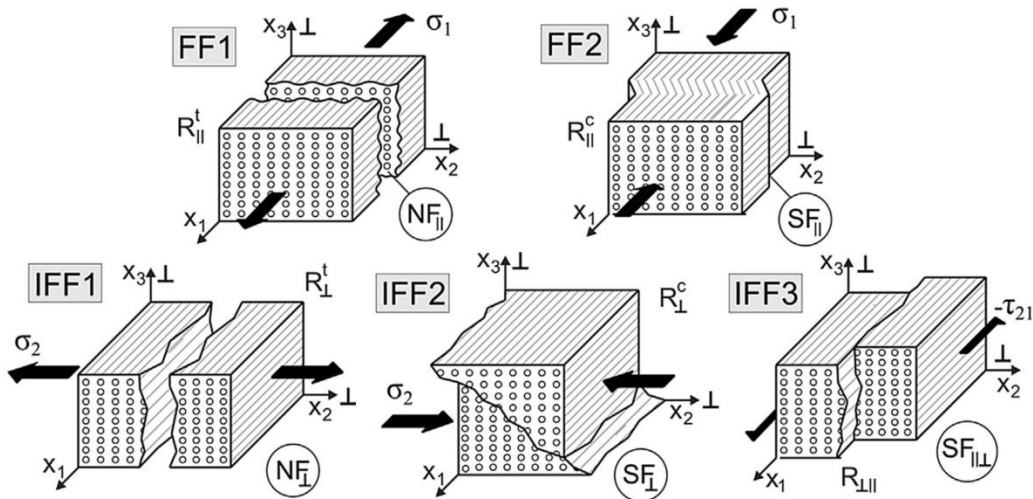


Abbildung 2-2 Versagensmodi eines transversal isotropen Materials unter dreidimensionaler Last [9]

Für jeden Versagensmodus kann mithilfe der Invarianten und Festigkeiten ($R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^c, R_{\perp}^t, R_{\perp}^c, R_{\perp\parallel}$) eine Versagensbedingung definiert werden. Dabei bezieht sich jeder Modus auf eine einzelne Festigkeit, die der Hauptlastrichtung entgegenwirkt. In der ersten Version des Versagenskriteriums von Cuntze [4] wurden die aus den Versagensbedingungen abgeleiteten Gleichungen für die Anstrengungen folgendermaßen aufgestellt (IFF2 und IFF3 waren in der ersten Version noch vertauscht, werden hier allerdings der Übersichtlichkeit wegen in der zum jetzigen Zeitpunkt aktuellen Schreibweise dargestellt):

$$\text{FF1:} \quad Eff^{\parallel\sigma} = \frac{I_1^*}{\bar{R}_{\parallel}^t} \quad (2a-e)$$

$$\text{FF2:} \quad Eff^{\parallel\tau} = \frac{-I_1}{\bar{R}_{\parallel}^c}$$

$$\text{IFF1:} \quad Eff^{\perp\sigma} = \frac{I_2 + \sqrt{I_4}}{2\bar{R}_{\perp}^t}$$

$$\text{IFF2:} \quad Eff^{\perp\tau} = \frac{(b_{\perp}^{\tau} - 1)I_2}{\bar{R}_{\perp}^c} + \frac{b_{\perp\parallel}^{\tau}I_3 + b_{\perp}^{\tau}I_4}{\bar{R}_{\perp}^c}$$

$$\text{IFF3:} \quad Eff^{\perp\parallel} = \frac{I_3^{3/2}}{\bar{R}_{\perp\parallel}^3} + b_{\perp\parallel} \frac{I_2I_3 - I_5}{\bar{R}_{\perp\parallel}^3}$$

Dabei berücksichtigt $I_1^* = \varphi_f \cdot \sigma_{1f} = \varepsilon_1 \cdot E_{\parallel}^t$ nicht den Einfluss der Matrix in Faserrichtung, sondern nur den der Faser selbst [4], um Effekte aus Querkontraktionen berücksichtigen zu können [9] (φ_f Faservolumengehalt, ε_1 Dehnung in Faserrichtung und E_{\parallel}^t Elastizitätsmodul in Faserrichtung für Zugspannung). Die b-Parameter beschreiben die innere Reibung im Material. Für die Bestimmung dieser Parameter durch Kalibrierungspunkte wird auf die Arbeit von Cuntze und Freund verwiesen [4].

Aufgrund eines numerischen Problems wendet Cuntze in seinem Beitrag zur WWFE-II [3] eine Vereinfachung auf den IFF3 Fall (damals noch als IFF2 bezeichnet) an, die er bereits in einer früheren Arbeit herleitete [2]. Diese Formulierungen sind die zu diesem Zeitpunkt Aktuellsten und werden im Folgenden in ihrer Ausgangsform und mit eingesetzten Invarianten (Gleichungen 1a-e) aufgeführt:

$$\text{FF1:} \quad Eff^{\parallel\sigma} = \frac{I_1^*}{\bar{R}_{\parallel}^t} = \frac{\varepsilon_1 E_{\parallel}^t}{\bar{R}_{\parallel}^t} \quad (3a-e)$$

$$\text{FF2:} \quad Eff^{\parallel\tau} = \frac{-I_1^*}{\bar{R}_{\parallel}^t} = \frac{-\varepsilon_1 E_{\parallel}^c}{\bar{R}_{\parallel}^t}$$

$$\text{IFF1:} \quad Eff^{\perp\sigma} = \frac{I_2 + \sqrt{I_4}}{2\bar{R}_{\perp}^t} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2}}{2\bar{R}_{\perp}^t}$$

$$\text{IFF2:} \quad Eff^{\perp\tau} = \frac{(b_{\perp}^{\tau} - 1)I_2 + b_{\perp}^{\tau}\sqrt{I_4}}{\bar{R}_{\perp}^c} = \frac{(b_{\perp}^{\tau} - 1)(\sigma_2 + \sigma_3) + b_{\perp}^{\tau}\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2}}{\bar{R}_{\perp}^c}$$

$$\text{IFF3:} \quad Eff^{\perp\parallel} = \frac{b_{\perp\parallel}I_{23-5} + \sqrt{b_{\perp\parallel}^2 I_{23-5}^2 + 4\bar{R}_{\perp\parallel}^2 (\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2)^2}}{2\bar{R}_{\perp\parallel}^3}$$

$$\text{mit } I_{23-5} = 2\sigma_2\tau_{21}^2 + 2\sigma_3\tau_{31}^2 + 4\tau_{23}\tau_{31}\tau_{21}$$

Die Änderung im IFF2 (vorher IFF3) ist damit zu begründen, dass der Ausdruck $b_{\perp\parallel}^{\tau}$ aus der Originalversion nicht mehr benötigt wird [8]. Im Vergleich zur vorherigen Version wird außerdem die veränderte Invariante I_1^* ebenfalls für den FF2 verwendet. Die Gründe dafür wurden oben bereits genannt und können in [9] nachgelesen werden.

2.4. Innere Reibung

Die beiden Parameter für die innere Reibung $b_{\perp\parallel}$ und $b_{\perp\perp} (\equiv b_{\perp}^{\tau})$ können auf drei unterschiedliche Varianten bestimmt werden, die hier allerdings nur kurz in Abschnitt 2.6. erwähnt werden und in [9] nachgelesen werden können. Für die in Abschnitt 4 folgenden Berechnungen sind nur folgende Zusammenhänge von Interesse:

$$b_{\perp\parallel} = 2\mu_{\perp\parallel} \quad (4a-b)$$

$$b_{\perp\perp} = \frac{1}{1 - \mu_{\perp\perp}}$$

Die Werte μ der inneren Reibung können über zwei Punkte auf der $\tau_{21}(\sigma_2)$ Bruchkurve bzw. den Bruchwinkel aus einem einachsigen Druckversuch bestimmt werden [9].

2.5. Interaktion der Versagensmodi

Cuntze teilt das Materialversagen in fünf verschiedene Modi auf (vgl. Abbildung 2–2). Jedem Modus kann, wie in Abschnitt 2.3. geschehen, eine Materialanstrengung zugeordnet werden. Um die Gesamtanstrengung zu berechnen, werden die einzelnen Anstrengungen unter Verwendung eines Interaktionsexponenten m wie folgt miteinander kombiniert [4]:

$$Eff^{(res)m} = \sum_{i=1}^5 Eff^{(i)m} = Eff^{(FF1)m} + Eff^{(FF2)m} + Eff^{(IFF1)m} + Eff^{(IFF2)m} + Eff^{(IFF3)m} \quad (5)$$

Ein Interaktionsexponent von $m = 1$ bedeutet, dass die Anstrengungen der einzelnen Modi addiert werden. Im Gegensatz dazu haben kleinen Anstrengungen bei größeren Werten von m keinen großen Einfluss auf die Gesamtanstrengung. Diese wird dann durch die größte Einzelanstrengung dominiert.

Überschreitet $Eff^{(res)}$ den Wert 1 bzw. 100% liegt Versagen vor. Unterhalb dieser Grenze liegt keine Schädigung vor. Im Fall von linearem Verhalten und Abwesenheit von Eigenspannungen existiert ein einfacher Zusammenhang zwischen der Gesamtanstrengung und dem Gesamtreservefaktor [4]:

$$Eff^{(res)} = \frac{1}{f_{Res}^{(res)}} \quad (6)$$

2.6. Bestimmung der Cuntze Parameter

Für transversal-isotrope Materialien werden fünf Materialfestigkeiten benötigt, um das Versagenskriterium nach Cuntze anwenden zu können. Dazu gehören Zug- sowie Druckfestigkeiten parallel und quer zur Faserrichtung sowie die Schubfestigkeit des Laminates. Zur Bestimmung dieser Größen ist ein homogener, möglichst nur aus der zu untersuchenden Spannung bestehender, Belastungszustand im Versuch anzustreben [7] [9].

Zur Bestimmung der Zugfestigkeiten kann das Verfahren aus der EN ISO 527-5 herangezogen werden. Eigenschaften in Faserrichtung können unter Anwendung der DIN EN 2561 und quer zur Faserrichtung anhand DIN EN 2597 bestimmt werden. Da im Rahmen dieser Versuche lediglich ein Versagen in gewissem Abstand von der Lasteinleitung sicherzustellen ist und beispielsweise seitliches Ausweichen der Probe nicht berücksichtigt werden muss, ist die Durchführung der Festigkeitsbestimmung relativ einfach [7].

Mit der DIN ESO 14126 ist die Bestimmung der Druckeigenschaften parallel sowie senkrecht zur Faserrichtung eines UD-Laminates möglich. Alternativ bietet die DIN EN 2850 eine Methode zur Ermittlung der fasernparallelen Eigenschaften. Bei der Bestimmung der Druckeigenschaften ist besonderes Augenmerk auf die Stabilität des Probekörpers zu legen. Strenggenommen stellt die Bestimmung des Druckkennwertes einen Mikrostabilitätskennwert dar, da Versagen auf mikro-mechanischer Ebene durch ein seitliches Ausweichen der Fasern mit resultierendem Materialversagen eintritt. Werden jedoch homogenisierte Lagenfestigkeiten betrachtet, kann der so ermittelte Kennwert als Grenze der Festigkeit verwendet werden [7].

Für die Bestimmung der Schubfestigkeit wird aufgrund seines einfachen Aufbaus häufig auf den $\pm 45^\circ$ -Zugversuch nach DIN EN 6031 oder DIN EN ISO 14129 zurückgegriffen. Weitere Methoden zur Bestimmung der Schubfestigkeit sind der nicht genormte 10° -off-axis-Zugversuch, der Iospecu-Schubversuch sowie die Abscherversuche Double-Notch nach ASTM D3846 oder der Rail-Shear nach ASTM D4255 [7].

Zur Bestimmung der Cuntze Parameter $\mu_{\perp\parallel}$ und $\mu_{\perp\perp}$ kann der ARCAN Versuchsaufbau herangezogen werden. Ein einachsiger Versuchsaufbau ermöglicht die Bestimmung des Cuntze Reibparameters $\mu_{\perp\perp}$ aus dem Bruchwinkel im Versuch. Der bi-axiale ARCAN-Aufbau kann dazu genutzt werden, Spannungszustände in den Moden IFF2 und IFF3 zu erzeugen, um die Reibparameter $\mu_{\perp\parallel}$ und $\mu_{\perp\perp}$ aus dem vorliegenden Spannungszustand zu ermitteln [7] [9].

Der Interaktionsexponent m kann durch Versuche in einem Zwei-Mode-Bereich durch Curve-fitting abgeschätzt werden. Die Erfahrung zeigt, dass Werte zwischen 2,5 und 3 eine hohe Vorhersagegenauigkeit versprechen [9].

3. Elemente der Benutzeroberfläche

Das Tool „3D Cuntze Failure Mode Concept“ wurde in der Programmiersprache Python der Version 3.6 programmiert. Die graphische Oberfläche wurde mit Hilfe der Graphikbibliothek Tkinter erstellt.

Die GUI setzt sich aus mehreren Bereichen zusammen und lässt sich grob in zwei Hälften einteilen. Die obere Hälfte ist stets sichtbar, während die untere Hälfte bei Bedarf über eine Checkbox ein- oder ausgeblendet werden kann (vgl. Abbildung 3–1).

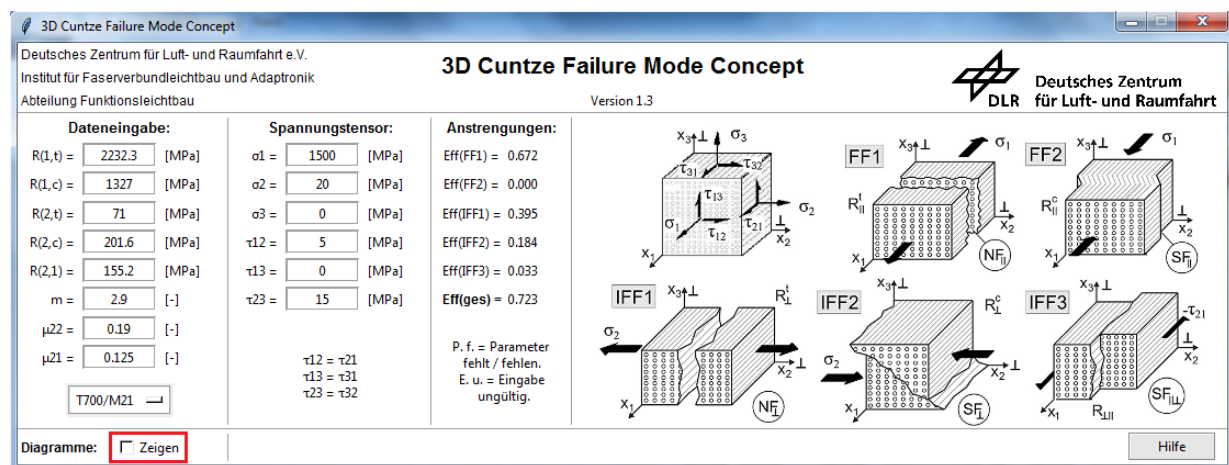


Abbildung 3-1 Darstellung der oberen Hälfte des Tools „3D Cuntze Failure Mode Concept“

Mittig in der Kopfzeile der GUI befinden sich der Titel des Tools und die aktuelle Versionsnummer. Links davon befinden sich kurze Informationen über das Institut, in dem dieses Tool entwickelt wurde. Auf der rechten Seite ergänzt das DLR-Logo die Kopfzeile.

Unterhalb der Kopfzeile befindet sich eine Zeile aus vier Bereichen. Zu diesen gehören die Eingabe der Materialdaten (Dateneingabe) auf der linken Seite der GUI und die Eingabe des Spannungstensors daneben. Der dritte Bereich, rechts vom Spannungstensor gelegen, ist für die Ausgabe der berechneten Anstrengungen verantwortlich. Den vierten Bereich, auf der rechten Seite der GUI, bildet eine Skizze der Versagensmodi.

Im optionalen Bereich befindet sich auf der linken Seite der GUI ein Bereich für die Eingabe experimenteller Daten (Datenpaare). Darunter liegen zwei weitere Eingabefelder, mit denen eine benutzerdefinierte Spannungscombination auf Versagen überprüft werden kann. Auf der rechten Seite der GUI befindet sich ein Diagrammbereich, der von einem kleinen Zoom-Fenster, links davon, erweitert wird. Außerdem gibt es zwischen der Dateneingabe und dem Zoom-Fenster, Buttons, die eine Bedienungsanleitung öffnen, Graphen speichern oder in neuen Fenstern öffnen können (vgl. Abbildung 3–2). Unterhalb der zuletzt genannten Buttons befindet sich eine kleine Informationsübersicht über die Berechnungswege für die Bruchkurve sowie die Schnittpunkte, um

kritische Bewertung der Ergebnisse durch den Benutzer zu ermöglichen und diesen gegebenenfalls auf mögliche Rechenfehler, bzw. Abweichungen aufmerksam zu machen.

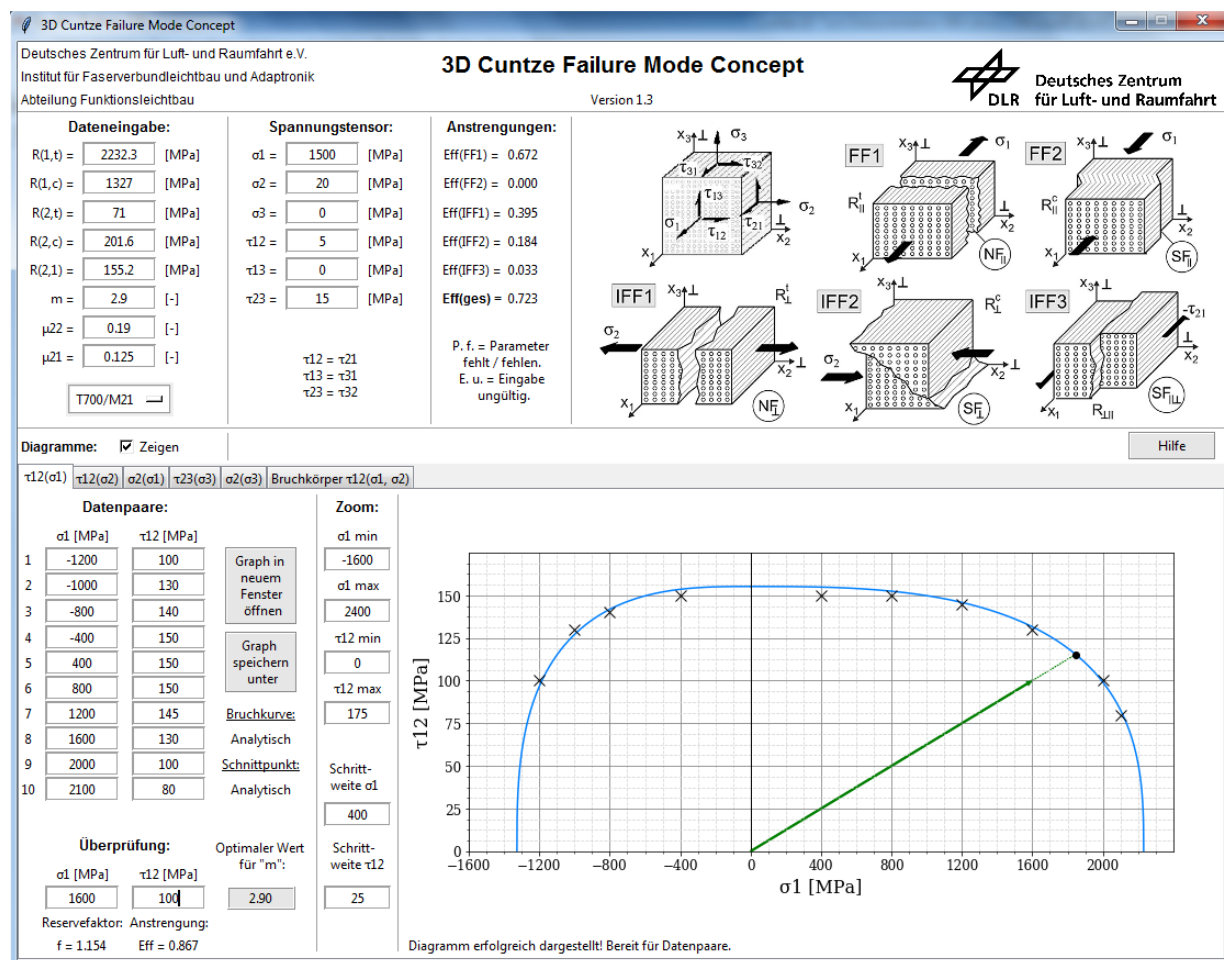


Abbildung 3-2 Darstellung des gesamten Tools „3D Cuntze Failure Mode Concept“ am Beispiel von T700/M21

In den nächsten Abschnitten sollen die einzelnen Bereiche der GUI genauer beschrieben werden.

3.1. Eingabe von Materialdaten

Für die Eingabe der Materialdaten gibt es zwei Möglichkeiten. Die Erste ist die manuelle Eingabe über die Eingabefelder, wobei Dezimalzahlen durch einen Punkt getrennt werden. Die zweite Möglichkeit ist das automatische Füllen der Felder über eine Datenbank, die mit einem Mausklick auf den Button unterhalb der Eingabefelder geöffnet wird (vgl. Abbildung 3–3). Die Datenbank kann leicht über den Quellcode erweitert werden. Die Werte für die ersten drei Materialien stammen aus einem internen Bericht zum 2D Tool [6]. Die Werte der letzten beiden Materialien stammen aus [4].

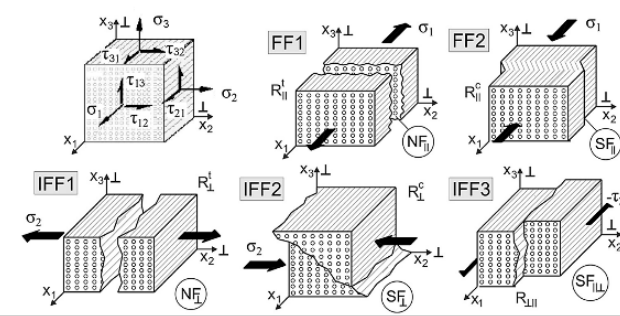
Dateneingabe:	Spannungstensor:	Anstrengungen:	
R(1,t) = <input type="text"/> [MPa]	σ_1 = <input type="text"/> 1500 [MPa]	Eff(FF1) = P. f.	
R(1,c) = <input type="text"/> [MPa]	σ_2 = <input type="text"/> 20 [MPa]	Eff(FF2) = P. f.	
R(2,t) = <input type="text"/> [MPa]	σ_3 = <input type="text"/> 0 [MPa]	Eff(IFF1) = P. f.	
R(2,c) = <input type="text"/> [MPa]	τ_{12} = <input type="text"/> 5 [MPa]	Eff(IFF2) = P. f.	
R(2,1) = <input type="text"/> [MPa]	τ_{13} = <input type="text"/> 0 [MPa]	Eff(IFF3) = P. f.	
m = <input type="text"/> [-]	τ_{23} = <input type="text"/> 15 [MPa]	Eff(ges) = P. f.	
μ_{22} = <input type="text"/> [-]	$\tau_{12} = \tau_{21}$	P. f. = Parameter fehlt / fehlen.	
μ_{21} = <input type="text"/> [-]	$\tau_{13} = \tau_{31}$	E. u. = Eingabe ungültig.	
$\tau_{23} = \tau_{32}$			
<div> <div>manuell</div> <div>Diagram</div> <div> <div>$\tau_{12}(\sigma_1)$</div> <div>σ_1</div> <div>1</div> </div> </div> <div> <div>manuell</div> <div>T700/M21</div> <div>T300/BSL914C</div> <div>IM7/8551-7</div> <div>E-glass/LY556</div> <div>A-5 carbon/epoxy</div> </div> <div> <div>$\sigma_2(\sigma_3)$</div> <div>Bruchkörper $\sigma_3(\sigma_1, \sigma_2)$</div> <div>Zoom:</div> <div>σ_1 min</div> </div> <div>Graph in</div>			Hilfe

Abbildung 3-3 Materialeingabe über die Datenbank oder manuell

3.2. Berechnung der Materialanstrengungen

Die Materialanstrengungen werden in der oberen Hälfte des Tools, links von der Skizze der Versagensmodi (vgl. Abbildung 3–1), ausgegeben. Erforderlich für die Berechnung sind die Materialdaten und der Spannungstensor. Für die Berechnung der einzelnen Anstrengungen müssen allerdings nicht alle Werte vorliegen, sondern nur die, die für den einzelnen Modus notwendig sind. Es erscheinen Tooltips über den Anstrengungen, sobald sich der Mauszeiger darauf befindet, die alle nötigen Argumente für die jeweilige Anstrengungsfunktion zeigen. Sollten die Eingaben ungültig sein, beispielsweise durch Buchstaben, wird dies dem Benutzer ebenfalls ausgegeben, sobald alle Eingabefenster gefüllt sind.

Die Berechnung erfolgt durch Drücken der „Enter“- oder „Tab“-Taste innerhalb der Eingabefelder für die Materialdaten oder für den Spannungstensor.

3.3. Darstellung der Bruchkurven

Die Darstellung der in blau gezeichneten Bruchkurven erfolgt in dem unteren Bereich der GUI (vgl. Abbildung 3–2). Die Achsenabschnitte werden aus den Festigkeiten in die beanspruchten Richtungen im Voraus berechnet, um den Diagrammbereich optimal ausnutzen zu können. Das Gleiche gilt für die Schrittweiten auf den Achsen.

Für jede Bruchkurve gibt es einen eigenen Reiter, zwischen denen durch einfache Klicks hin- und hergewechselt werden kann (vgl. Abbildung 3–4, rot markiert). Die GUI-Bausteine (Widgets) für die einzelnen Bruchkurven sind dieselben. Nur der Bruchkörper ist anders aufgebaut.

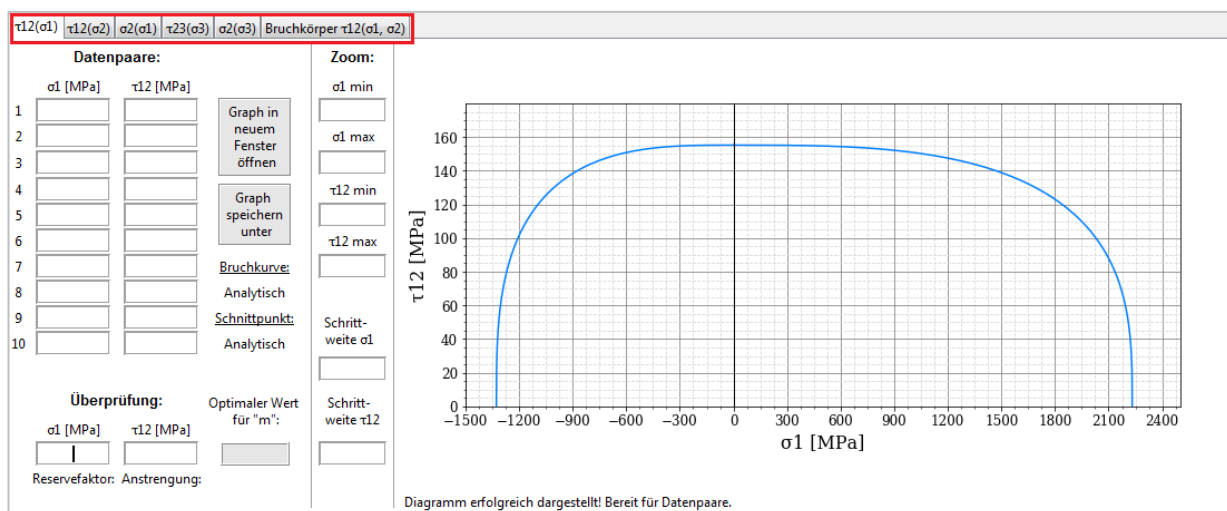


Abbildung 3–4 Reiter zum Wechseln des Bruchkurvenfensters, Zoom-Fenster, Buttons und Dateneingabe

Über die Eingabefelder links vom Diagramm (vgl. Abbildung 3–4; Spalte mit Bezeichnung „Zoom“), kann der Benutzer den Fokus des Diagrammes individuell anpassen, um zum Beispiel Bereiche von Interesse genauer untersuchen zu können. Die Änderungen werden durch Betätigung der „Enter“- oder „Tab“-Taste angewandt.

3.4. Eingabe experimenteller Daten

Die Eingabe der experimentellen Daten erfolgt in einem Bereich auf der linken Seite der unteren Hälfte (vgl. Abbildung 3–2 bzw. Abbildung 3–4). Dort sind jeweils 10 Eingabefelder für die Abszisse und Ordinate angeordnet. Die Darstellung der Datenpaare im Diagramm erfolgt durch Drücken der „Enter“-Taste in einem beliebigen Feld des Eingabebereiches. Um die Rechenzeiten minimal zu halten und ein reibungsloses Füllen der Felder zu gewährleisten, wird darauf verzichtet, die Berechnung auch mit der „Tab“-Taste starten zu können.

Sobald mindestens ein gültiges Datenpaar eingetragen ist, erfolgt die Berechnung des optimalen Wertes für den Interaktionsexponenten „ m “ (nach Methode der kleinsten Quadrate, vgl. Abschnitt 3.4.2). Außerdem werden die Punkte im Diagramm durch Kreuze visualisiert (vgl. Abbildung 3-2).

3.4.1. Überprüfung von benutzerdefinierten Spannungskombinationen

Zur Überprüfung einer bestimmten Spannungskombination befinden sich unterhalb der Eingabefelder für die experimentellen Daten noch jeweils ein Eingabefeld für den Abszissen- und Ordinate wert der zu untersuchenden Kombination.

Unterhalb der zu prüfenden Spannungskombination erfolgt nach Betätigung der „Enter“-Taste die Ausgabe des Anstrengungswertes und des Reservefaktors (vgl. Abschnitt 4.3.).

Im Diagramm wird die Spannungscombination durch einen Vektor dargestellt, der im Nullpunkt startet. Je nachdem, ob sich der Punkt innerhalb oder außerhalb der Bruchfläche befindet, hat der Vektor die Farbe Grün ($Eff^{(res)} \leq 1$) oder Rot ($Eff^{(res)} > 1$) (vgl. Abbildung 3–5 und 3–6).

Für den Fall, dass sich der Punkt innerhalb der Bruchfläche befindet, wird zusätzlich eine gestrichelte Linie geplottet, die die Projektion des Ortsvektors der Spannungscombination auf die Bruchkurve darstellt. Der Schnittpunkt mit der Bruchkurve wird durch einen schwarzen Punkt hervorgehoben (vgl. Abbildung 3–5).

Sollten die eingegeben Werte außerhalb der Diagrammgrenzen liegen, werden die Vektoren dennoch geplottet und die Anstrengung sowie der Reservefaktor berechnet. Um den Punkt sichtbar zu machen, muss das Zoom-Feature benutzt werden.

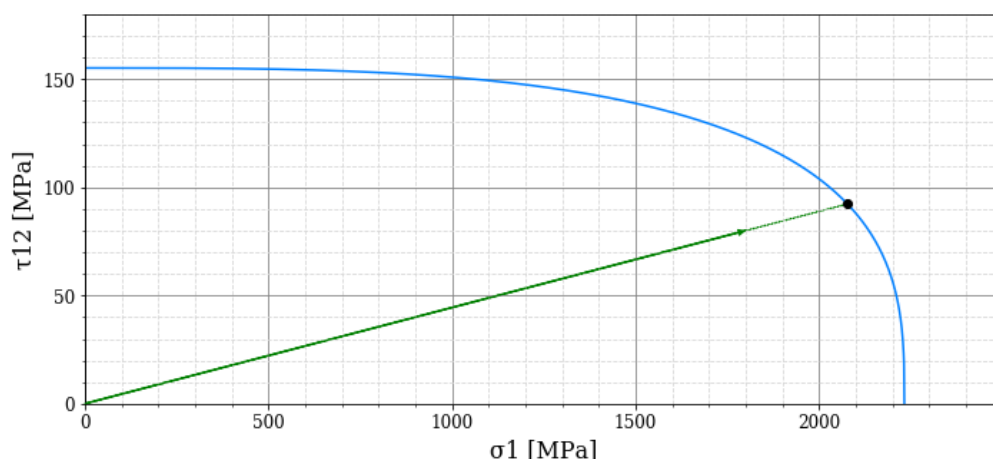


Abbildung 3–5 Überprüfung einer akzeptablen Belastung am Beispiel von T700/M21 ($\sigma_{1,E} = 1800$ MPa, $\tau_{21,E} = 80$ MPa und $m = 3,1$)

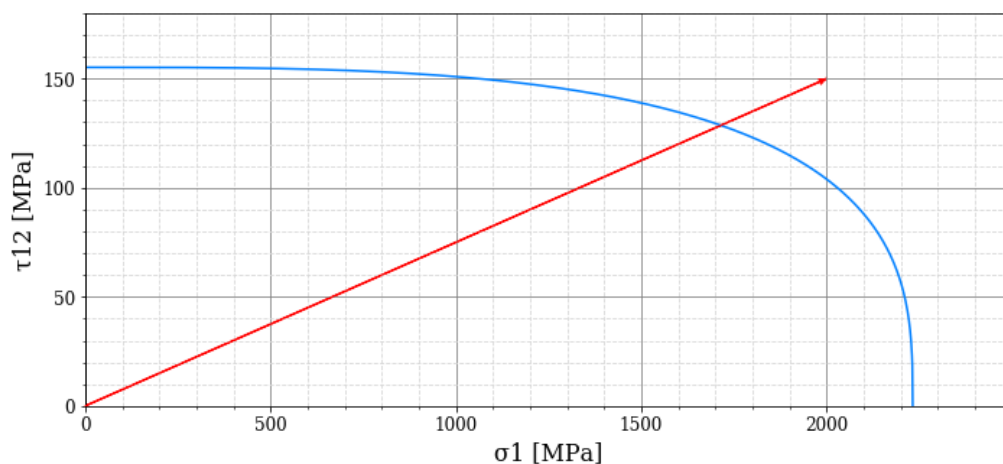


Abbildung 3–6 Überprüfung einer zu großen Belastung am Beispiel von T700/M21 ($\sigma_{1,E} = 2000$ MPa, $\tau_{21,E} = 150$ MPa und $m = 3,1$)

3.4.2. Curve-fitting und Buttons

Das Curve-fitting erfolgt, sobald mindestens ein gültiges Datenpaar in die Liste eingetragen wird. Im Hintergrund durchläuft das Programm eine Schleife, um mit Hilfe einer Erweiterung der „Methode der kleinsten Quadrate“ einen optimalen Wert für den Interaktionsexponenten „ m “ zu berechnen. Der berechnete Wert wird dann im Ausgabefeld angezeigt.

Die Schleife beginnt bei einem Wert $m = 0,1$, der bei jedem Durchlauf um 0,05 erhöht wird. Innerhalb der Schleife werden, falls die Daten zwischen den Randwerten auf der Abszisse liegen, die Differenzen zwischen den Ordinatenwerten der Datenpaaren und den Werten der Bruchkurve gebildet, quadriert und anschließend summiert. Andernfalls werden die Abszissendifferenzen an Stelle der Ordinatendifferenzen gebildet. Dieser Vorgang wird bis $m = 15$ wiederholt (größere Werte für m sind unwahrscheinlich und würden nur zu höherem Rechen- und Zeitaufwand führen). Das m mit der kleinsten Differenzensumme wird als optimales m ausgegeben.

Ein Spezialfall tritt auf, wenn Datenpunkte links oder rechts von der Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ liegen. Die Berechnung dauert in diesem Fall länger, da keine Bruchfunktionen hergeleitet werden können und die numerischen Verfahren zu einem hohen Rechenaufwand der Schleife führen.

Der Button mit der Aufschrift „Graph in neuem Fenster öffnen“ erstellt ein neues Fenster, in dem das aktuelle Diagramm dargestellt wird. Zusätzlich sind einige Daten aufgeführt, um den Graph eindeutig zuordnen zu können (vgl. Abbildung 3–7). Auf diese Weise können mehrere Graphen nebeneinander geöffnet und direkt miteinander verglichen werden.

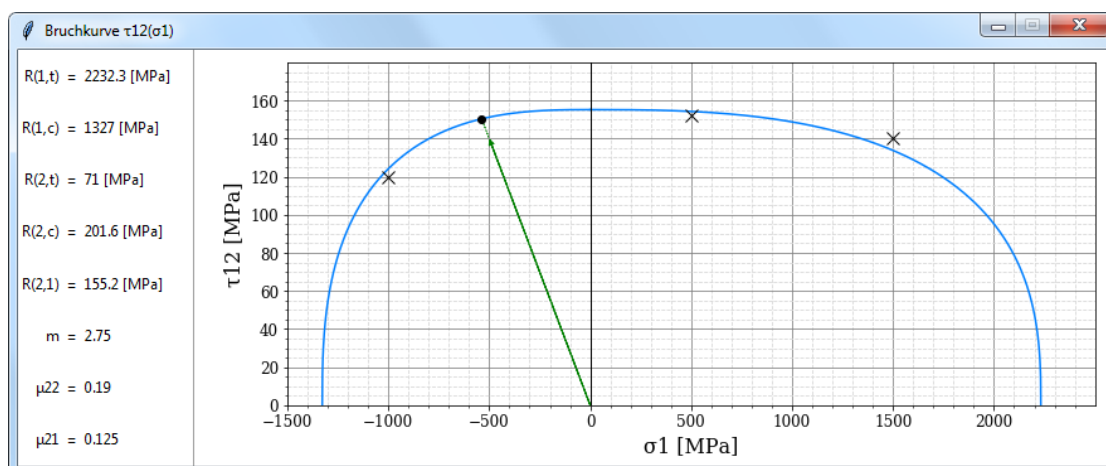


Abbildung 3-7 Neues Fenster mit dem aktuellen Graphen und einigen Daten zur Identifizierung

Der Button „Graph speichern unter“ öffnet ein Dialogfenster, um einen Speicherort zugewiesen zu bekommen, an dem der Graph als png-Datei gespeichert werden soll (vgl. Abbildung 3–8). Die Namen der Dateien sind festgelegt und haben die Form „YoverX“, wobei „Y“ den Namen der Variablen auf der Ordinate und „X“ den Namen der Variablen auf der Abszisse trägt. Die Dateinamen können allerdings nach dem Speichern manuell geändert werden.

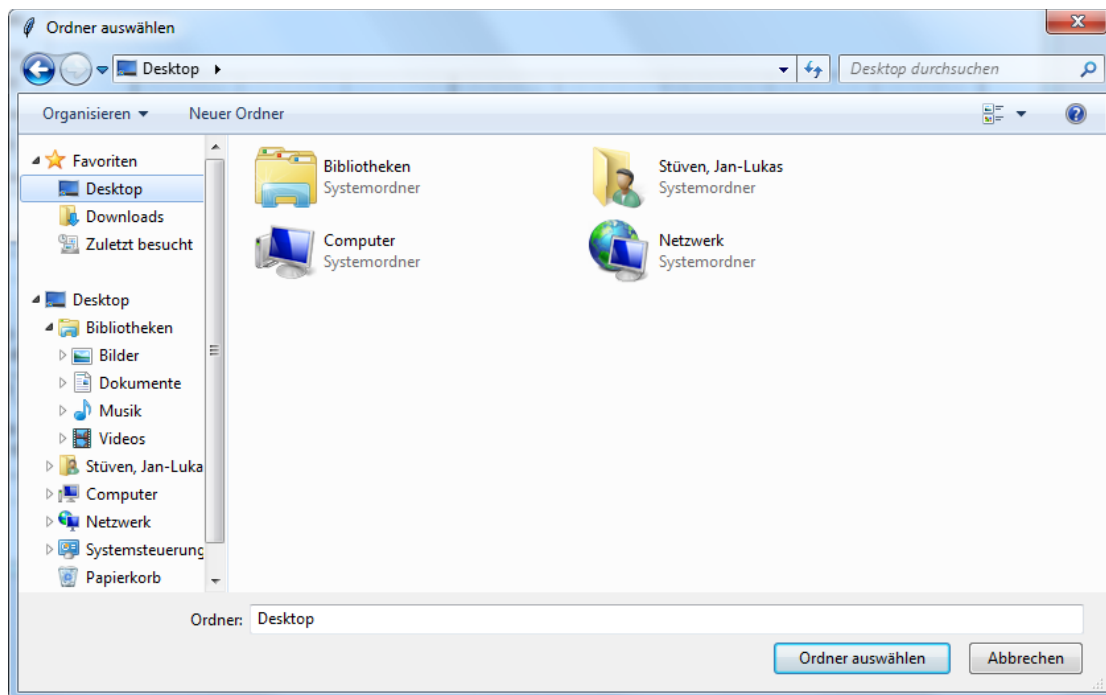


Abbildung 3-8 Auswahl eines Speicherordners für den zu speichernden Graphen

3.5. Darstellung des Bruchkörpers

Im Reiter "Bruchkörper" wird ein Fenster gezeigt, in dem sich auf der linken Seite eine Spalte mit Buttons und rechts davon ein dreidimensionales Netzgitter – der Bruchkörper – befindet. Der 3D Plot ist interaktiv, sodass die Maus benutzt werden kann, um den Körper um die drei Hauptachsen drehen zu können. Das Seitenverhältnis ist standardmäßig nicht auf allen Achsen gleich (vgl. Abbildung 3–9), jedoch können die Achsenintervalle auf allen Achsen durch einen Button gleichgesetzt werden (Skaliert / Nicht skaliert).

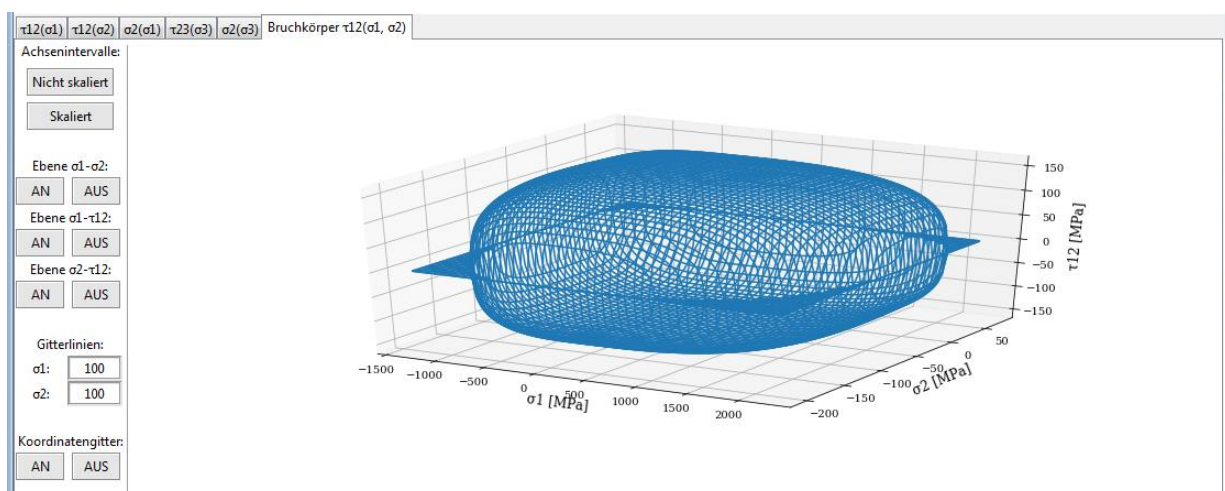


Abbildung 3-9 Darstellung des Bruchkörpers in der Ausgangsform am Beispiel T700/M21

Zusätzlich besteht die Möglichkeit drei semitransparente Ebenen einzufügen, die für jeweils eine Spannung den Wert Null annehmen und so Schnittebenen durch den Ursprung bilden (vgl. Abbildung 3–10).

Des Weiteren besteht die Möglichkeit die Anzahl der Linien im Gitter zu variieren. Dafür sind zwei Eingabefelder auf der linken Seite des Bruchkörpers vorgesehen.

Das letzte Feature besteht aus zwei Buttons in der unteren linken Ecke. Über diese kann das Koordinatengitter ein- bzw. ausgeblendet werden. Die Standardeinstellung sind eingeblendete Gitterlinien wie in Abbildung 3–10.

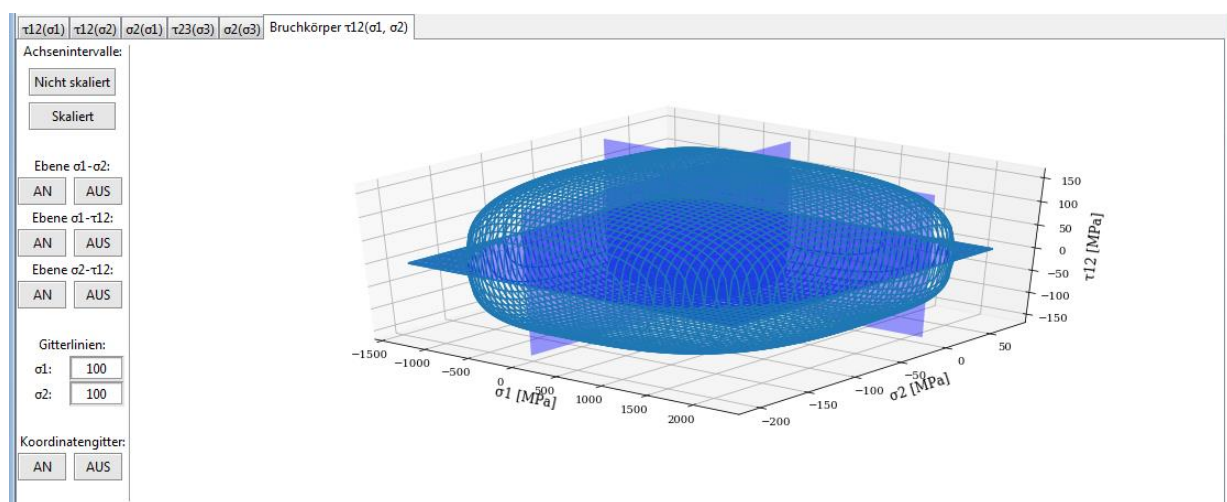


Abbildung 3–10 Darstellung des Bruchkörpers am Beispiel T700/M21 in einer aus der Ausgangslage gedrehten Position mit allen eingeblendeten Schnittebenen durch den Ursprung

4. Implementierung des Cuntze Kriteriums in 3D

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen zur Beschreibung der Bruchkurven hergeleitet. Außerdem wird das Vorgehen zur Bestimmung des Schnittpunktes der Bruchkurve mit dem projizierten Ortsvektor der zu überprüfenden Spannungscombination erläutert. Schließlich folgt die Herleitung der Gleichung, die den Bruchkörper beschreibt.

4.1. Formulierung in Python

Die Formulierung einiger Parameter, wie sie in den vorherigen Abschnitten erfolgte, eignet sich nicht für die Implementierung in Python. Aus diesem Grund werden im Weiteren Abkürzungen bzw. vereinfachte Symbole als Synonyme für diese Parameter eingeführt, um die Handhabung zu erleichtern. Tabelle 4–1 fasst die Zusammenhänge prägnant zusammen.

Tabelle 4-1 Formulierung der Parameter in der neuen Schreibweise für die Implementierung in Python

Bezeichnung	Altes Symbol	Neues Symbol	Einheit
Zugfestigkeit in Faserrichtung	$\bar{R}_{ }^t$	$R(1, t)$	[MPa]
Druckfestigkeit in Faserrichtung	$\bar{R}_{ }^c$	$R(1, c)$	[MPa]
Zugfestigkeit parallel zur Faserrichtung	\bar{R}_{\perp}^t	$R(2, t)$	[MPa]
Druckfestigkeit parallel zur Faserrichtung	\bar{R}_{\perp}^c	$R(2, c)$	[MPa]
Schubfestigkeit	$\bar{R}_{\perp }$	$R(2, 1)$	[MPa]
Parameter der inneren Reibung	$\mu_{\perp\perp}$	μ_{22} bzw. μ_{22}	[-]
Parameter der inneren Reibung	$\mu_{\perp }$	μ_{21} bzw. μ_{21}	[-]
Parameter der inneren Reibung	$b_{\perp\perp}$	b_{22} bzw. b_{22}	[-]
Parameter der inneren Reibung	$b_{\perp }$	b_{21} bzw. b_{21}	[-]

4.2. Erstellung der Bruchkurven

Bruchkurven sind Funktionen, die Abhängigkeiten zwischen Spannungen bei Versagen graphisch darstellen können. Dazu werden meistens zwei Spannungen ausgewählt und die Übrigen zu Null gesetzt, damit ausschließlich der Einfluss der ausgewählten Spannungen einfließt.

Eine Bruchkurve kann als räumliche Trennlinie zwischen Gebieten von Versagen und Nicht-Versagen angesehen werden. Befindet sich beispielsweise ein Spannungszustand im umschlossenen Gebiet, wird das Material nicht versagen. Befindet er sich jedoch außerhalb, wird das Material versagen.

Das generelle Vorgehen zur Berechnung von Bruchkurven besteht darin, zuerst die Gleichung der Gesamtanstrengung (vgl. Gleichung 5) gleich Eins zu setzen (Übergang von Nicht-Versagen zu Versagen). Anschließend werden alle Spannungen, die nicht betrachtet werden sollen, gleich Null gesetzt. Als letztes folgt die Umstellung nach der Variablen, die als Ordinate dargestellt werden soll. In den folgenden Abschnitten wird dieses Verfahren für fünf Bruchkurven durchgeführt. Nicht alle Bruchkurven sind analytisch lösbar. Tabelle 4–2 gibt eine kurze Übersicht über die Lösungsmethoden für die einzelnen Kurven.

Tabelle 4-2 Übersicht über die Lösungsmethoden zur Berechnung der einzelnen Bruchkurven

	$\tau_{21}(\sigma_1)$	$\tau_{21}(\sigma_2)$	$\sigma_2(\sigma_1)$	$\tau_{32}(\sigma_3)$	$\sigma_2(\sigma_3)$
Analytisch	X	X	X		X
Numerisch				X	

4.2.1. Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für die Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ ausführlich hergeleitet. In den darauffolgenden Abschnitten wird auf eine ausführliche Herleitung verzichtet, da das allgemeine Vorgehen für alle Bruchkurven analog ist. Spezialfälle werden in den jeweiligen Abschnitten diskutiert.

Für die Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ sind nur die Normalspannung in Faserrichtung und Schubspannung in der 1-2-Ebene von Interesse. Die übrigen Spannungen (σ_2 , σ_3 , τ_{31} und τ_{32}) werden gleich Null gesetzt (I_{23-5} ist ebenfalls Null, wird aber zur Verdeutlichung der Herleitung der Bruchkurvenfunktionen in Gleichungen 8a-b und 9 beibehalten; vgl. Gleichung 3e). Aus Gleichung 5 und den Formulierungen für die einzelnen Anstrengungen (Gleichungen 3a-e) folgt somit:

$$1 = Eff(FF1)^m + Eff(FF2)^m + Eff(IFF3)^m \quad (7)$$

Die Anstrengungen für IFF1 und IFF2 ergeben sich zu Null, da weder σ_1 noch τ_{21} in den Gleichungen 3c-d enthalten und die übrigen Spannungen gleich Null sind.

Eine Anstrengung für FF1 und FF2 kann nicht gleichzeitig vorliegen, da σ_1 entweder eine Zug- oder Druckspannung ist. Für den Fall, dass σ_1 eine Zugspannung ist, lassen sich aus Gleichungen 3a-b sowohl für FF1 als auch für FF2, Anstrengungen berechnen. Eine Anstrengung für FF2 ist jedoch nicht plausibel, da dieser Versagensmodus nur durch Druckspannung hervorgerufen werden kann, die in diesem Fall nicht anliegt. Dieses Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen, Normalspannungen nur in Anstrengungen eingesetzt werden dürfen, wenn ihre Wirkungsrichtung der Hauptversagensrichtung des Modus gleicht (Zug oder Druck). Ist dies nicht der Fall, werden die Spannungen gleich Null gesetzt. Schubspannungen sind hiervon nicht betroffen.

Bei der Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ muss, auf Grund der im vorangegangenen Absatz eingeführten Einschränkung, eine Fallunterscheidung zwischen positiven ($Eff(FF2) = 0$) bzw. negativen Werten ($Eff(FF1) = 0$) für σ_1 durchgeführt werden:

$$\text{für } \sigma_1 \geq 0: \quad 1 = Eff(FF1)^m + Eff(IFF3)^m \quad (8a-b)$$

$$\rightarrow \quad 1 = \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{0 + 4R(2,1)^2 \cdot \tau_{21}^4 + 0}{2R(2,1)^3}} \right)^m$$

$$\text{für } \sigma_1 < 0: \quad 1 = Eff(FF2)^m + Eff(IFF3)^m$$

$$\rightarrow \quad 1 = \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{0 + 4R(2,1)^2 \cdot \tau_{21}^4 + 0}{2R(2,1)^3}} \right)^m$$

Um nun aus diesen Gleichungen die Funktionen für die Bruchkurve zu erhalten, müssen die beiden Gleichungen (8a und 8b) nach τ_{21} aufgelöst werden.

Für $\sigma_1 \geq 0$ erfolgt die Berechnung hier exemplarisch (vgl. Gleichung 9). Für alle weiteren Bruchkurven sind die Umformungen im Anhang A zu finden und es werden nur noch die Endgleichungen im Text verwendet.

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{0 + 4R(2,1)^2 \cdot \tau_{21}^4 + 0}{2R(2,1)^3}} \right)^m \quad (9) \\ \rightarrow \quad \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \sqrt{\frac{2R(2,1) \cdot \tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \\ \rightarrow \quad \tau_{21}(\sigma_1) &= R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art und Weise erhält man Gleichung 10 für $\sigma_1 < 0$ (vgl. Anhang A-a):

$$\tau_{21}(\sigma_1) = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (10)$$

Trägt man diese beiden Funktionen (Gleichung 9 und 10) nun über die σ_1 -Achse auf, ist die Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ vollständig. In Abbildung 4–1 ist diese für das Material T300/BSL914C epoxy dargestellt.

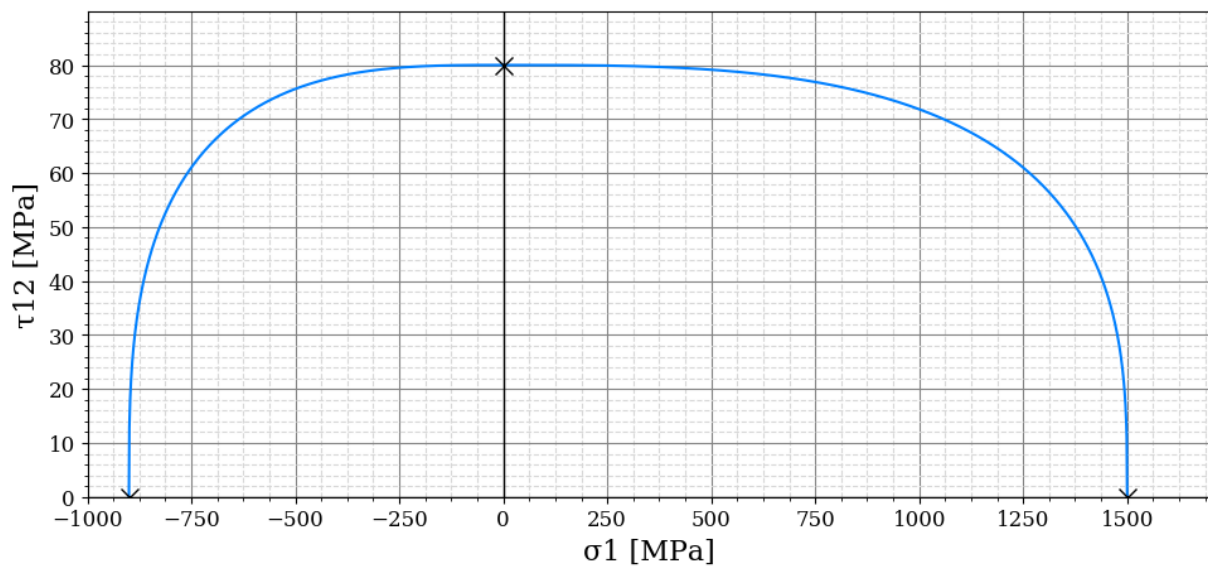


Abbildung 4-1 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ des Materials T300/BSL914C epoxy [12] mit Interaktionsexponent $m = 3,1$; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(1,t) = 1500$ MPa, $R(1,c) = 900$ MPa, $R(2,1) = 80$ MPa)

An den Schnittpunkten der Bruchkurve mit den Achsen nehmen die Spannungen die Werte der entsprechenden Festigkeiten an ($R(1,t)$, $R(1,c)$ und $R(2,1)$; visualisiert durch schwarze Kreuze), sowie es auch bei der Bruchkurve von Cuntze der Fall ist (vgl. Abbildung 4–2). Für negative τ_{21} -Werte kann die Bruchkurve an der σ_1 -Achse gespiegelt werden.

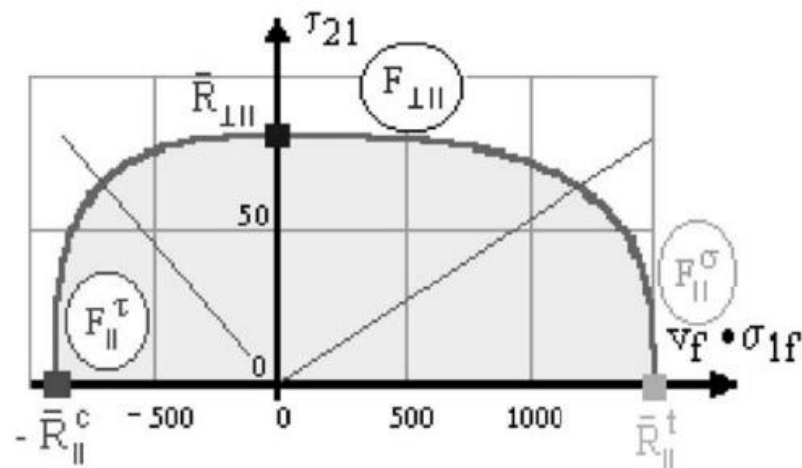


Abbildung 4-2 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ nach Cuntze des Materials T300/BSL914C epoxy mit Interaktionsexponent $m = 3,1$; [4].

4.2.2. Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$

Für die Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ werden die Spannungen σ_1 , σ_3 , τ_{31} und τ_{32} gleich Null gesetzt, so dass nur noch die Anstrengungen IFF1, IFF2 und IFF3 übrig bleiben. Für den Fall, dass $\sigma_2 \geq 0$, lauten die Anstrengungen für IFF1 und IFF2 folgendermaßen:

$$Eff(IFF1) = \frac{\sigma_2}{R(2,t)} \geq 0 \quad (11a-b)$$

$$Eff(IFF2) = \frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2}{R(2,c)} \geq 0$$

Für den Fall, dass $\sigma_2 < 0$, lauten die Anstrengungen dementsprechend:

$$Eff(IFF1) = \frac{0}{R(2,t)} = 0 \quad (12a-b)$$

$$Eff(IFF2) = \frac{-\sigma_2}{R(2,c)} > 0$$

Die Anstrengung für IFF3 bleibt in beiden Fällen gleich und beträgt:

$$Eff(IFF3) = \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \quad (13)$$

Es ist auffällig, dass für $\sigma_2 \geq 0$ sowohl eine Anstrengung für IFF1 als auch für IFF2 vorliegt. Dieses Ergebnis ist nicht plausibel, da bei reiner Zugspannung keine Anstrengung in Druckrichtung existieren kann. Aus diesem Grund folgt eine Anpassung, wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben wird. Sobald $\sigma_2 \geq 0$ ist, wird diese Spannung im IFF2 Fall gleich Null gesetzt. Ebenso wird, falls $\sigma_2 < 0$ ist, die Spannung in IFF1 gleich Null gesetzt, wobei dies hier keinen Einfluss auf die Bruchfunktion hat, da die entsprechende Anstrengung in jedem Fall Null ist (vgl. 12a). Aus diesen Annahmen werden nun, wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben, die Gleichungen 14a-b für die Bruchkurve berechnet (vgl. Anhang A-b).

$$\text{für } \sigma_2 \geq 0: \quad \tau_{21}(\sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad (14a-b)$$

$$\text{für } \sigma_2 < 0: \quad \tau_{21}(\sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

Sollten die Bruchkurven aus den nicht angepassten Gleichungen, also mit nicht plausiblen Modi, hergeleitet werden (vgl. Anhang A-b), fällt auf, dass die Bruchkurven für $\sigma_2 < 0$ identisch sind. Der Grund dafür liegt darin, dass die Anstrengung in Gleichung 12a immer Null ist. Für $\sigma_2 \geq 0$ befindet sich ein weiterer Term (Anstrengung aus Gleichung 11b) in der Gleichung (vgl. Gleichung 15 und Anhang A-b):

$$\tau_{21}(\sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)}\right)^m - \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2}{R(2,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad (15)$$

In Abbildung 4–3 sind beide Bruchkurven dargestellt.

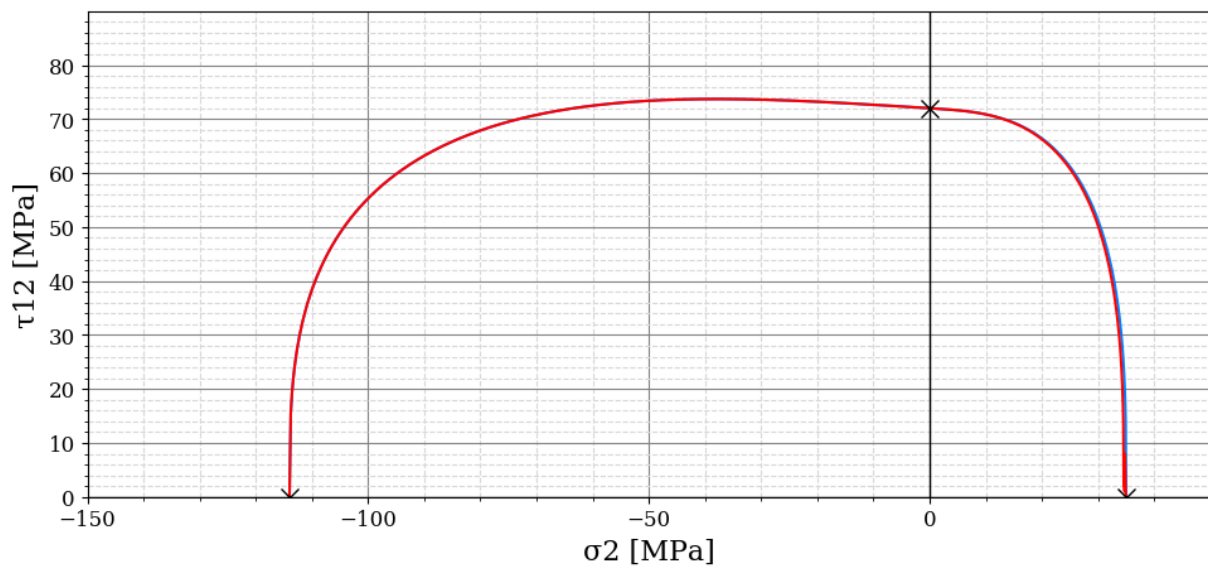


Abbildung 4-3 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ des Materiales E-glass/LY556 epoxy [12] mit Interaktionsexponent $m = 3,1$, und $b_{21} = 0,13$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; im zweiten Quadranten liegen beide Kurven übereinander; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa, $R(2,1) = 72$ MPa)

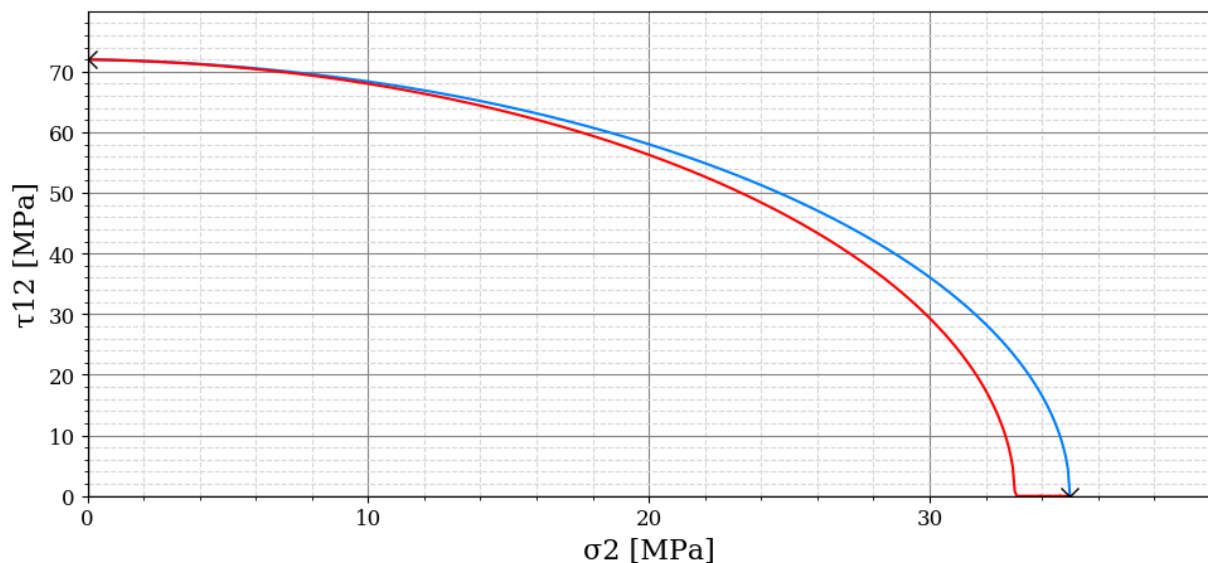


Abbildung 4-4 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ des Materiales E-glass/LY556 epoxy [12] im ersten Quadranten mit Interaktionsexponent $m = 2$, und $b_{21} = 0,13$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa, $R(2,1) = 72$ MPa)

Für den Fall, dass τ_{21} den Wert Null annimmt, ist σ_2 die einzige angreifende Spannung. Somit sollte die Bruchkurve den Punkt $(R(2,t), 0)$ beinhalten, sowie es auch in der Bruchkurve von Cuntze der Fall ist (vgl. Abbildung 4-5) [4]. Aus Abbildung 4-4 geht jedoch hervor, dass dies lediglich der Fall für die angepasste, jedoch nicht für die nicht angepasste Bruchkurve ist. Dies bestätigt die in Abschnitt 4.2.1. getroffene Annahme, σ_2 gleich Null zu setzen, falls die Wirkungsrichtung der Spannung nicht mit der Hauptversagensrichtung des Modus übereinstimmt.

Der Abstand zwischen dem Schnittpunkt der roten Kurve mit der σ_2 -Achse und dem Punkt $(R(2, t), 0)$ hängt vom Interaktionsexponenten m ab (je größer die Werte für m , desto kleiner der Abstand). In diesem Bereich nimmt Gleichung 15 komplexe Werte an, da der Inhalt der großen Klammer kleiner als Null wird, woraus der Fehler auf der Abszisse resultiert. Die Schnittpunkte beider Bruchkurven mit der negativen σ_2 -Achse und der τ_{21} -Achse sind identisch, da die angepasste und unangepasste Funktion der Bruchkurve im zweiten Quadranten gleich sind, und liegen bei den jeweiligen Festigkeiten ($R(2, c)$ und $R(2, 1)$).

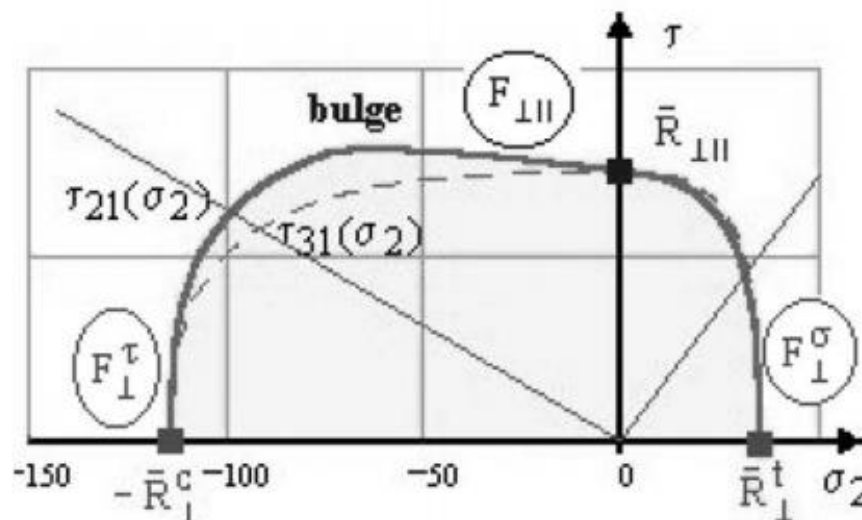


Abbildung 4–5 Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ und $\tau_{31}(\sigma_2)$ nach Cuntze des Materiales E-glass/LY556 epoxy mit Interaktionsexponent $m = 3,1$, und $b_{21} = 0,13$ [4].

4.2.3. Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$

Für diese Bruchkurve werden die Spannungen σ_3 , τ_{21} , τ_{31} und τ_{32} gleich Null gesetzt. Im Gegensatz zu den ersten beiden Bruchkurven werden in diesem Fall alle Quadranten genutzt. Aufgrund der Spannungen σ_1 und σ_2 wirken die Modi FF1, FF2, IFF1 und IFF2.

Tabelle 4–3 zeigt die Berechnung der Anstrengungen für positive bzw. negative Spannungen σ_1 und σ_2 . Im ersten Quadranten der Bruchkurve (vgl. Abbildung 4–6) sind die Anstrengungen für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (also FF1, IFF1 und IFF2) aktiv; im zweiten Quadranten FF2, IFF1 und IFF3; im dritten Quadranten FF2 und IFF2; und im vierten Quadranten FF1 und IFF2. Es ist zu erkennen, dass auch für diese Bruchkurve eine Anpassung, wie im vorherigen Abschnitt, durchgeführt werden muss, da IFF2 trotz reiner Zugspannung zur Gesamtanstrengung beiträgt und so zu nicht plausiblen Ergebnissen führt.

Tabelle 4-3 Anstrengungen für verschiedene Spannungswerte und Vorzeichen

	$\sigma_1 \geq 0$	$\sigma_1 < 0$	$\sigma_2 \geq 0$	$\sigma_2 < 0$
<i>Eff</i>(FF1)	$\frac{\sigma_1}{R(1, t)}$	0	–	–
<i>Eff</i>(FF2)	0	$\frac{-\sigma_1}{R(1, c)}$	–	–
<i>Eff</i>(IFF1)	–	–	$\frac{\sigma_2}{R(2, t)}$	0
<i>Eff</i>(IFF2)	–	–	$\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2}{R(2, c)}$	$\frac{-\sigma_2}{R(2, c)}$

Nach Anpassung der Gleichungen und Umstellen nach σ_2 (vgl. Anhang A-c) ergeben sich folgende vier Gleichungen, die zusammen die gesamte Bruchkurve abbilden:

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma_1 \geq 0 \\ \text{und } \sigma_2 \geq 0: & \sigma_2(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \end{array} \quad (16a-d)$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma_1 < 0 \\ \text{und } \sigma_2 \geq 0: & \sigma_2(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma_1 \geq 0 \\ \text{und } \sigma_2 < 0: & \sigma_2(\sigma_1) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma_1 < 0 \\ \text{und } \sigma_2 < 0: & \sigma_2(\sigma_1) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \end{array}$$

In den Gleichungen für den nicht angepassten Fall (Gleichungen 16c-d und 17a-b; vgl. Anhang A-c) treten, wie im vorherigen Abschnitt, weitere Terme (*Eff*(IFF2) für $\sigma_2 \geq 0$ aus Tabelle 4–3) auf, sodass die Zugfestigkeit quer zur Faserrichtung nicht erreicht wird:

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma_1 \geq 0 \\ \text{und } \sigma_2 \geq 0: & \sigma_2(\sigma_1) = \left(\left(\frac{R(2, t)^m \cdot R(2, c)^m}{R(2, c)^m + R(2, c)^m (2b_{22} - 1)^m} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right) \right)^{\frac{1}{m}} \end{array} \quad (17a-b)$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } \sigma_1 < 0 \\ \text{und } \sigma_2 \geq 0: & \sigma_2(\sigma_1) = \left(\left(\frac{R(2, t)^m \cdot R(2, c)^m}{R(2, c)^m + R(2, c)^m (2b_{22} - 1)^m} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right) \right)^{\frac{1}{m}} \end{array}$$

In Abbildung 4–6 ist die gesamte Bruchkurve für beide Fälle dargestellt. Abbildung 4–7 zeigt nur den ersten und zweiten Quadranten, um die Abweichungen der beiden Kurven voneinander zu verdeutlichen und die Schnittpunkte mit den Achsen besser erkenntlich zu machen.

Die blaue Kurve schneidet an allen Achsen jeweils die zugehörigen Festigkeiten ($R(1, t)$, $R(1, c)$, $R(2, t)$ bzw. $R(2, c)$). Die rote Kurve tut dies nur auf der σ_1 -Achse ($R(1, t)$, $R(1, c)$) und in den unteren

ren Quadranten für die σ_2 -Achse ($R(2,c)$). Diese Art von Verlauf ist nicht plausibel, da im Fall reiner Zugspannung in 2-Richtung, das Versagen erst bei Erreichen der Festigkeit $R(2,t)$ eintreten sollte, wie es bei der blauen Kurve der Fall ist. Abbildung 4–8 zeigt die Bruchkurve von Cuntze, die ebenfalls, wie die blaue Kurve, in allen Quadranten die Festigkeiten auf den Achsen schneidet. Diese Tatsache unterstützt die in Abschnitt 4.2.1. getroffene Annahme, nicht plausible Spannungen in den Anstrengungen gleich Null zu setzen.

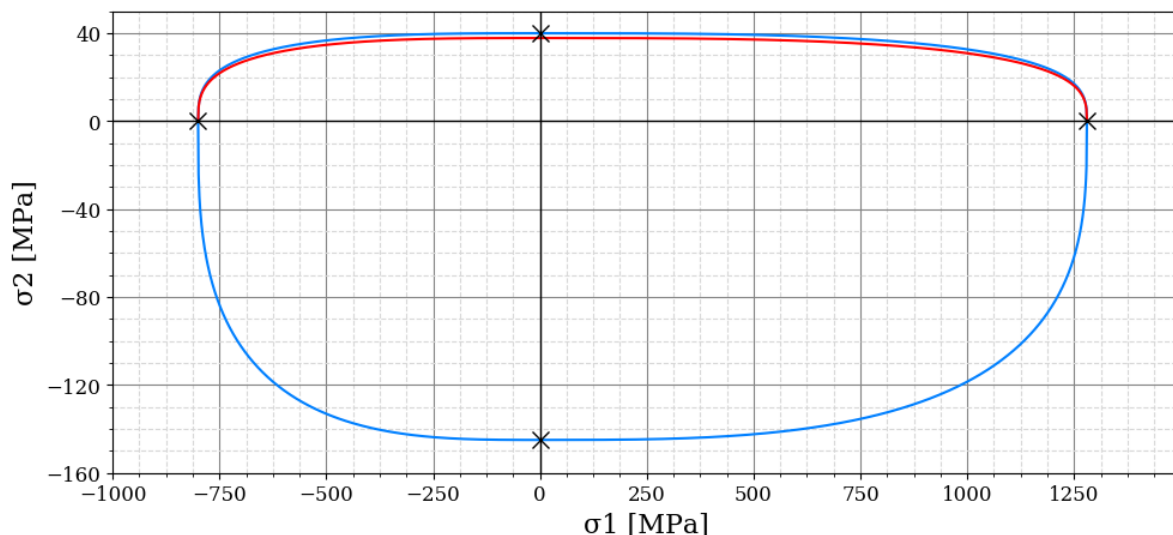


Abbildung 4–6 Gesamte Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ des Materials E-glass/MY750 epoxy [12] mit Interaktions-exponent $m = 3,1$; in blau die angepasste, in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(1,t) = 1280$ MPa, $R(1,c) = 800$ MPa, $R(2,t) = 40$ MPa, $R(2,c) = 145$ MPa)

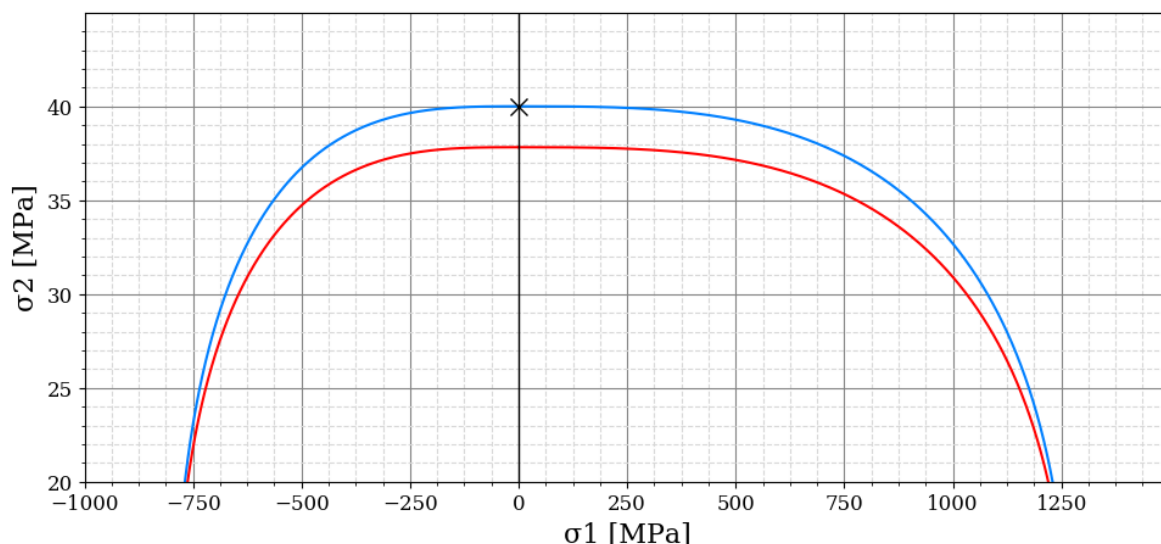


Abbildung 4–7 Ersten und zweiten Quadranten der Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ des Materials E-glass/MY750 epoxy [12] mit Interaktionsexponent $m = 3,1$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeit ($R(1,t) = 1280$ MPa, $R(1,c) = 800$ MPa, $R(2,t) = 40$ MPa, $R(2,c) = 145$ MPa)

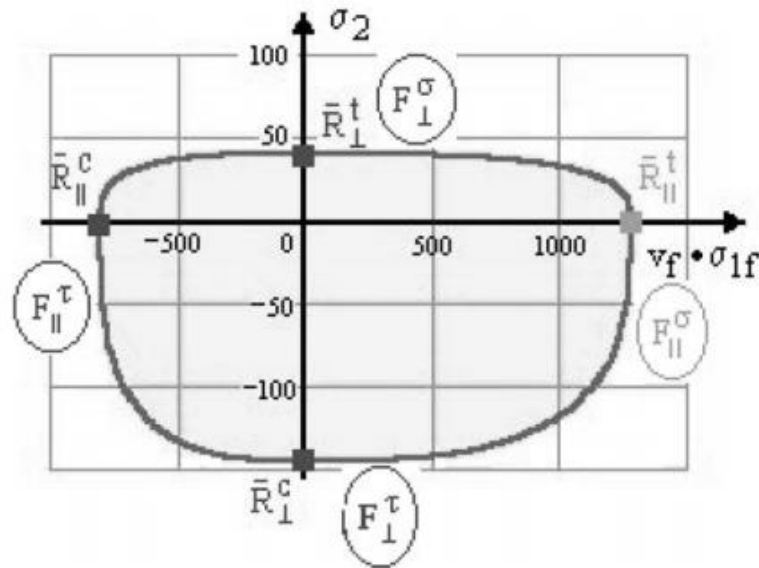


Abbildung 4-8 Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ nach Cuntze des Materiales E-glass/MY750 epoxy mit Interaktionsexponent $m = 3,1$; [4]

4.2.4. Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$

Die Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ betrachtet die beiden Spannungen σ_3 und τ_{32} . Alle übrigen Spannungen werden gleich Null gesetzt, sodass nur die Anstrengungen IFF1 und IFF2 aktiv sind (vgl. Gleichung 18).

$$1 = Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \quad (18)$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m$$

Die Spannung σ_3 kann entweder positive oder negative Werte annehmen. Aus diesem Grund müssen, wie in den vorherigen Abschnitten, Anpassungen an den Anstrengungen (aus Gleichung 18) vorgenommen werden. Die Gleichungen nach der Anpassung lauten (vgl. Anhang A-d):

$$\begin{aligned} \text{für } \sigma_3 \geq 0: \quad 1 &= \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{2b_{22}\tau_{32}}{R(2, c)} \right)^m \\ \text{für } \sigma_3 < 0: \quad 1 &= \left(\frac{\tau_{32}}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \end{aligned} \quad (19a-b)$$

Für den Fall, dass die Anstrengungen nicht angepasst werden, entspricht die Bruchfunktion der in Gleichung 18, da keine weiteren Vereinfachungen vorgenommen werden können.

Die Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ ist die Einzige, die numerisch berechnet werden muss. Der Grund dafür ist, dass die Wurzel in keinem der beiden Terme (IFF1 und IFF2) aufgelöst werden kann (vgl. Gleichung 18 und 19a-b) und so das Umstellen nach τ_{32} verhindert wird.

Um die Gleichungen 18 und 19a-b numerisch lösen zu können, wird eine Nullstellensuche mit Hilfe der Funktion „fsolve“ aus dem „SciPy“-Paket durchgeführt. Diese Funktion baut auf den Algorithmen aus der „FORTRAN“-Bibliothek „MINPACK“ auf [13] und benutzt den Levenberg-Marquardt Algorithmus. Zunächst werden die Gleichungen so umgestellt, dass auf einer Seite Null steht. Anschließend werden die Nullstelle für jeden Abszissenwert über die Funktion „fsolve“, und somit die gesuchten Werte für σ_1 , über eine Schleife bestimmt.

In Abbildung 4–9 sind die Bruchkurven sowohl für den angepassten, als auch für den nicht angepassten Fall für das Material E-glass/LY556 epoxy dargestellt.

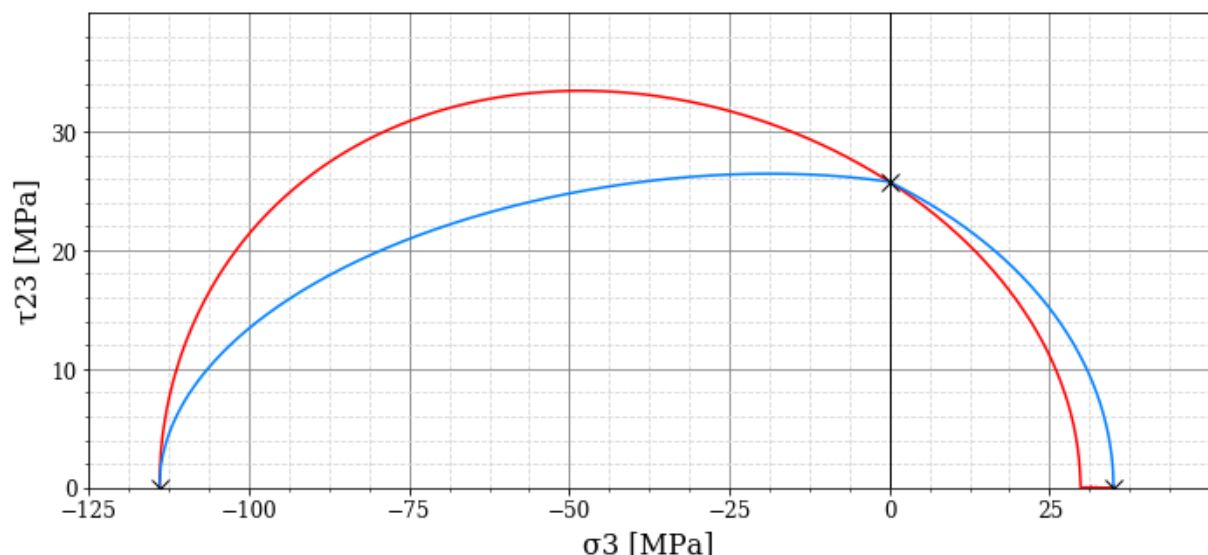


Abbildung 4–9 Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ am Beispiel E-glass/LY556 epoxy [12] mit Interaktionsexponenten $m = 2$ und $b_{22} = 1,5$; in blau die angepasste und in rot die nicht angepasste Bruchkurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa, $R(2,1) = 72$ MPa; für $m = 2$ ergibt sich der Schnittpunkt mit der Ordinate zu 25,74 MPa)

Der Schnittpunkt beider Kurven mit der Ordinate ist gleich und vom Interaktionsexponenten m abhängig. Er kann sowohl über Gleichung 18, als auch Gleichung 19a-b bestimmt werden, in dem σ_3 gleich Null gesetzt und die Gleichung nach τ_{32} umgestellt wird:

$$\begin{aligned}
 1 &= \left(\frac{\tau_{32}}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{2b_{22}\tau_{32}}{R(2,c)} \right)^m \quad (20) \\
 \rightarrow \quad 1 &= \tau_{32}^m \frac{R(2,c)^m + R(2,t)^m \cdot (2b_{22})^m}{R(2,c)^m \cdot R(2,t)^m} \\
 \rightarrow \quad \tau_{32} &= \left(\frac{R(2,c)^m \cdot R(2,t)^m}{R(2,c)^m + R(2,t)^m \cdot (2b_{22})^m} \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

Wie bereits in der Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ schneidet die rote Kurve nicht die Zugfestigkeit quer zur Faserrichtung ($R(2,t)$; Schnittpunkt mit der positiven σ_2 -Achse). Der Grund dafür ist die Gesamtanstrengung (Gleichung 5), die schon für einen kleineren Spannungswert als die Festigkeit den Wert eins erreicht. Zwischen diesem Spannungswert und dem Schnittpunkt ergeben sich aus Gleichung 18 komplexe Werte für τ_{32} . Der Abstand zwischen dem Schnittpunkt und der Zugfestigkeit steigt mit kleineren Werten für den Interaktionsexponenten m . Folglich werden Gleichung 18 bzw. Gleichung 19a für den Punkt $((R(2,t),0)$ ungültig:

$$\begin{aligned}
 1 &= \left(\frac{R(2,t) + \sqrt{0 + (-R(2,t))^2}}{2R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{0 + (-R(2,t))^2} + (b_{22} - 1)R(2,t)}{R(2,c)} \right)^m \quad (21) \\
 \rightarrow \quad 1 &= 1 + \left(\frac{(2b_{22} - 1)R(2,t)}{R(2,c)} \right)^m \quad \text{⚡}
 \end{aligned}$$

Die angepasste Kurve schneidet alle Festigkeiten, wobei sich im Schnittpunkt mit der Ordinate ein Knick befindet. Das Maximum befindet sich auf der linken Seite des Knicks. Die genauen Positionen können nicht analytisch berechnet werden, da Gleichung 18 bzw. Gleichung 19a nicht nach τ_{32} umgestellt und so keine Ableitungen gebildet werden können.

Im Excel-Tool von Petersen und Schollenberger [11] wird zur Darstellung der Bruchkurve die nicht angepasste Gleichung (Gleichung 18) verwendet, wobei eine andere Definition für den IFF3 Modus verwendet wird, sodass dieser ebenfalls einen Einfluss auf die Gesamtanstrengung hat. Die Definition von IFF3 nach Petersen und Schollenberger lautet [11; Tabellenblatt „3D3,23,Druck-Zug-Schub“ Zelle K46 ff.]:

$$Eff(IFF3) = \frac{\sqrt{\mu_{21}^2 I_{23-5}^2 + 4R(2,1)^2(\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2)^2} + \mu_{21} I_{23-5}}{2R(2,1)^3} \quad (22)$$

$$\text{mit } I_{23-5} = 2\sigma_2\tau_{31}^2 + 2\sigma_3\tau_{32}^2 + 4\tau_{21}\tau_{31}\tau_{32}$$

Die zugehörige Bruchkurve ist in Abbildung 4–10 zu sehen. Die Schnittpunkte auf der Abszisse stimmen nicht mit den Festigkeiten des Materials überein und sind relativ weit davon entfernt. Der Schnittpunkt mit der Ordinate liegt bei 24,22 MPa und liegt somit nah an dem Schnittpunkt

aus Abbildung 4–9. Eine mögliche Begründung für diese Tatsache ist, dass der Einfluss der IFF3 Anstrengung für $\sigma_3 \rightarrow 0$ relativ gering wird und so die Terme aus Gleichung 18 und Gleichung 19 dominieren. Es ist jedoch nicht auszuschließen, dass es sich bei der IFF3 Definition um einen Tippfehler handelt, da sie sich von der Definition aus der toolbegleitenden Dokumentation [10] unterscheidet.

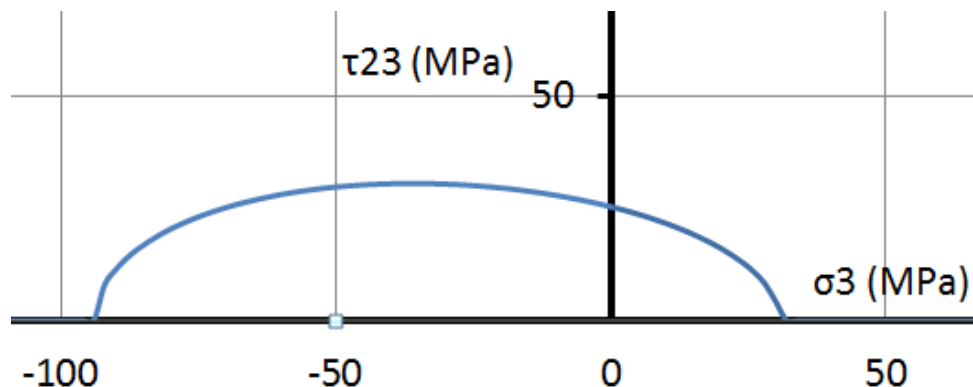


Abbildung 4–10 Auszug der Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ des Materials E-glass/LY556 epoxy [12] aus dem Excel-Tool von Petersen und Schollenberger [10] für einen Interaktionsexponenten $m = 2$ und $b_{22} = 1,5$

Für die Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ konnten von Cuntze keine geeigneten Diagramme zum Vergleich gefunden werden, sodass eine Verifizierung der Kurven in Abbildung 4–9 aussteht.

4.2.5. Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$

Die Spannungen σ_1 , τ_{21} , τ_{31} und τ_{32} werden gleich Null gesetzt, sodass nur die Anstrengungen für IFF1 und IFF2 aktiv sind. Die Bruchkurve für $\sigma_2(\sigma_3)$ kann auf drei unterschiedliche Arten erstellt und hergeleitet werden. Dabei unterscheiden sich die Modellvorstellungen für jede Kurve und stellen jeweils eine andere Herangehensweise dar. Die erste Variante ist die analytische Lösung der Gleichung für die Gesamtanstrengung (Gleichung 5) ohne Anpassung von nicht plausiblen Modi. Aus den Anstrengungen IFF1 und IFF2 ergibt sich folgende Gleichung:

$$1 = Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \quad (23)$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)(\sigma_2 + \sigma_3)}{R(2, c)} \right)^m$$

Im Vergleich zur Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ müssen in diesem Fall sechs anstatt vier Bruchfunktionen hergeleitet werden, da nicht nur zwischen positiven und negativen Spannungen unterschieden werden muss, sondern auch welche Spannung kleiner bzw. größer ist (nur in Quadranten in denen die Vorzeichen beider Spannungen gleich sind). Auflösen der Wurzeln für die einzelnen Spannungscombinationen führt zu den Gleichungen:

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0 \text{ mit } \sigma_3 \geq \sigma_2: \quad 1 = \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)} \right)^m \quad (24a-f)$$

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0 \text{ mit } \sigma_3 < \sigma_2: \quad 1 = \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2 - \sigma_3}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0: \quad 1 = \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0: \quad 1 = \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2 - \sigma_3}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0 \text{ mit } \sigma_3 \geq \sigma_2: \quad 1 = \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0 \text{ mit } \sigma_3 < \sigma_2: \quad 1 = \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2 - \sigma_3}{R(2, c)} \right)^m$$

Es fällt auf, dass Gleichung 24a, c und e sowie Gleichung 24b, d und f identisch sind. Aus diesem Grund lässt sich die Anzahl der zu berechnenden Gleichungen auf zwei reduzieren. Außerdem kann die Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$ an einer 45°-Linie durch den Ursprung gespiegelt werden, da sowohl σ_2 als auch σ_3 , Spannungen quer zur Faserrichtung beschreiben. Aus dem Grund, dass alle identischen Gleichungen entweder unter- oder oberhalb dieser 45°-Linie definiert sind, reicht es aus, eine einzige Bruchfunktion herzuleiten, die später gespiegelt wird. In diesem Fall wird Gleichung 24a für die Herleitung von $\sigma_2(\sigma_3)$ verwendet, um die Verwendung einer Umkehrfunktion zu vermeiden, wie es für die Umstellung von Gleichung 24b, d und f der Fall wäre (vgl. Anhang A-e):

$$1 = \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)} \right)^m \quad (25)$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Gleichung 25 ist für das gesamte σ_3 -Intervall gültig, wird aber nur im positiven Bereich (Quadrant 1 und 4) genutzt, da im dritten Quadranten eine Annahme realisiert wird, die auf idealem Materialverhalten basiert. Diese Annahme besagt, dass aufgrund der Druckbelastung aus allen Richtungen, keine Veränderung der Form oder des Volumens möglich sind, das Material also als komplett porenfrei gilt [8]. Aus der Anstrengung für IFF2 (vgl. Gleichung 23) folgt dann eine Geradengleichung der Form:

$$\sigma_2(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \quad (26)$$

Abbildung 4–11 zeigt die aus Gleichung 25 und Gleichung 26 zusammengesetzte und im Vergleich zu den anderen Bruchkurven konservativste Bruchkurve, sowie deren Spiegelung an der 45°-Linie in grün. Im dritten Quadranten liegen die blauen und die grünen Kurven übereinander. Ein Nachteil dieser ersten Variante ist, dass auf beiden Achsen nur die Druckfestigkeiten ($R(2, c)$),

jedoch nicht die Zugfestigkeiten ($R(2,t)$), geschnitten werden. Außerdem werden die Gleichungen 24a-f nicht wie in den vorherigen Abschnitten erklärt, angepasst.

Die zweite Variante der Herleitung führt auf eine lineare Darstellung der Bruchkurve und besteht darin, nur einzelne Anstrengungen zu verwenden, indem nichtplausible Spannungen gleich Null gesetzt werden. Im ersten Quadranten bleibt somit nur die Anstrengung IFF1 und im dritten Quadranten die Anstrengung IFF2 als aktiver Modus übrig. Die kombinierten Anstrengungen im zweiten und vierten Quadranten werden vernachlässigt und durch Erweiterungen der Übrigen ersetzt. Aus Gleichung 23 folgen nach einer Fallunterscheidung folgende Bruchfunktionen (vgl. Anhang A-e):

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0 \text{ mit } \sigma_3 < \sigma_2: \quad \sigma_2(\sigma_3) = R(2, t) \quad (27a-d)$$

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0 \text{ mit } \sigma_3 \geq \sigma_2: \quad \sigma_3(\sigma_2) = R(2, t)$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0 \text{ mit } \sigma_3 < \sigma_2: \quad \sigma_2(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c)$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0 \text{ mit } \sigma_3 \geq \sigma_2: \quad \sigma_2(\sigma_3) = \frac{R(2, c) + \sigma_3}{2b_{22} - 1}$$

Dabei reicht es aus Gleichung 27b und 27d zu betrachten, da die anderen beiden Gleichungen durch Spiegelung an der 45°-Linie erzeugt werden können. Im zweiten bzw. vierten Quadranten werden Gleichung 27b und 27d soweit fortgeführt, bis sie sich in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt treffen. Die zugehörige Bruchkurve ist in blau in Abbildung 4–11 zu sehen.

Ein Vorteil dieser Darstellungsweise ist, dass alle Festigkeiten auf den Achsen geschnitten werden. Nachteilig ist, dass keine Interaktion von Versagensmodi durch die Betrachtung von nur einer Spannung erfolgt und so zu jeder Zeit nur die größere Anstrengung betrachtet wird, während die andere Anstrengung ignoriert wird.

Die dritte Herleitungsvariante ist eine Erweiterung der Zweiten, da hier grundsätzlich zwei Anstrengungen betrachtet werden. Zuerst erfolgt eine Anpassung von Gleichung 23 um nicht plausible Anstrengungen zu eliminieren. Anschließend werden für jeden Quadranten zwei Anstrengungen kombiniert. Für den ersten und dritten Quadranten gibt es eine Besonderheit, die Cuntze als „MfFD“ (multi-fold failure domain) [4] bezeichnet. Dabei wirken die Anstrengungen IFF1 im ersten Quadranten bzw. IFF2 im dritten Quadranten doppelt, um die kombinierte Anstrengung aus 2- und 3-Richtung zu betrachten. Im zweiten und vierten Quadranten sind dabei die Modi IFF1 und IFF2 als „MiFD“ (mixed failure domain) aktiv. Aus der Umstellung und Anpassung von Gleichung 23 ergeben sich folgende Bruchfunktionen (vgl. Anhang A-e):

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0: \quad \sigma_2(\sigma_3) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad (28a-d)$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0: \quad \sigma_2(\sigma_3) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0: \quad \sigma_2(\sigma_3) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0: \quad \sigma_2(\sigma_3) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

Die zugehörige Bruchkurve ist in rot in Abbildung 4–11 dargestellt. Für diesen Fall wird die Annahme des idealen Materialverhaltens nicht getroffen. Andernfalls könnte Gleichung 28d (rote Kurve im dritten Quadranten) durch Gleichung 27c und d (blaue Geraden im dritten Quadranten) ersetzt werden.

Zu den Vorteilen dieser Variante gehören, dass alle Festigkeiten auf den Achsen geschnitten werden und, dass die Interaktion von Anstrengungen in „MFFD“ berücksichtigt wird.

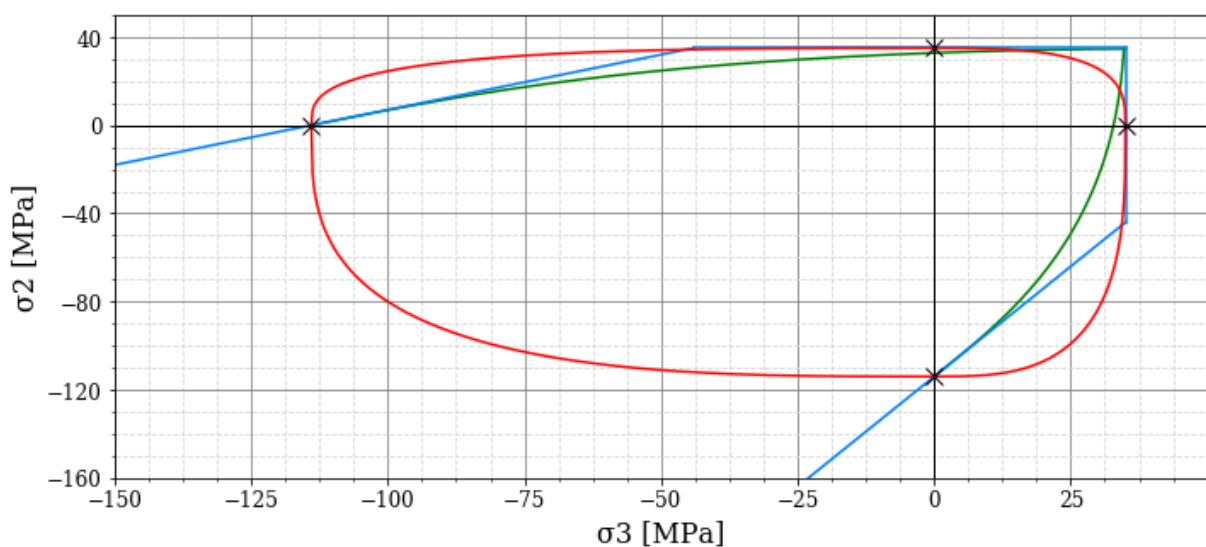


Abbildung 4-11 Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$ am Beispiel E-glass/LY556 epoxy [12] mit Interaktionsexponenten $m = 3,1$ und $b_{22} = 1,5$; in blau die Kurve mit einzelnen Anstrengungen, in rot die Kurve mit kombinierten Anstrengungen und in grün die nicht angepasste Kurve; „X“ markiert die Festigkeiten ($R(2,t) = 35$ MPa, $R(2,c) = 114$ MPa)

In Abbildung 4–12 ist die Bruchkurve $\sigma_3(\sigma_2)$ von Petersen dargestellt. Der Verlauf der Kurve entspricht der Grünen aus Abbildung 4–11. Auffällig ist, dass auch hier die Festigkeiten auf den positiven Achsenabschnitten ($R(2,t)$) nicht geschnitten werden. Auch die schematische Bruchkurve von Cuntze in Abbildung 4–13 ähnelt der grünen Kurve aus Abbildung 4–11, wobei hier alle Festigkeiten auf den Achsen geschnitten werden, sodass eher eine Mischung aus der blauen und grünen Kurve dargestellt wird.

Da sich die Bruchkurven von Petersen und Cuntze in den Schnittstellen mit den Achsen widersprechen, kann die Güte der in Abbildung 4–11 dargestellten Bruchkurven ohne Validierungsmöglichkeiten nicht weiter bewertet werden. In der GUI wird die grüne Kurve dargestellt, da die experimentellen Daten aus [9] den Verlauf dieser Variante unterstützen (vgl. Abbildung 4–12).

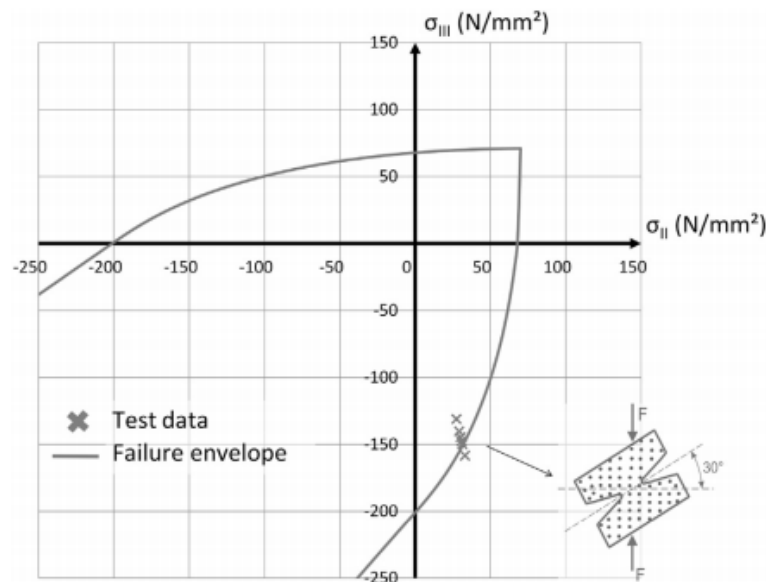


Abbildung 4–12 Bruchkurve $\sigma_3(\sigma_2)$ ($\equiv \sigma_2(\sigma_3)$ wegen Symmetrie) aus [9] mit Interaktionsexponenten $m = 2,6$, $b_{22} = 1,27$, $R(1,t) = 2230$ MPa, $R(1,c) = 1537$ MPa, $R(2,t) = 71$ MPa, $R(2,c) = 202$ MPa

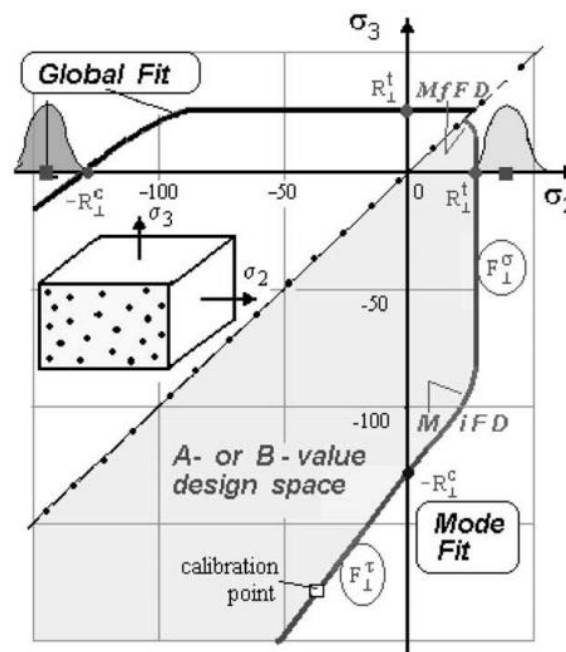


Abbildung 4–13 Schematische Bruchkurve $\sigma_3(\sigma_2)$ ($\equiv \sigma_2(\sigma_3)$ wegen Symmetrie) aus [4]

4.3. Berechnung von Schnittpunkten, Anstrengungen und Reservefaktoren

Die Berechnung des Schnittpunktes aus der projizierten Gerade der auf Versagen zu überprüfenen Spannungskombination mit der Bruchkurve ist eine Voraussetzung für die Bestimmung der Anstrengung und des Reservefaktors und kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen.

Die erste und bevorzugte Art ist eine analytische Lösung, bei der die Bruchkurve mit der Geradengleichung der Spannungskombination gleichgesetzt und nach dem Abszissenwert aufgelöst wird. Der zugehörige Ordinatenwert wird über Einsetzen des Abszissenwertes in die Gleichung der Bruchkurve bestimmt.

Die zweite Methode ist eine geometrische, bei der die Differenz aus den Ordinatenwerten der Bruchkurve und Geradengleichung mit einer definierten Schrittweite über die gesamte Abszisse gebildet werden. Die Koordinaten des Schnittpunktes ergeben sich dann aus den Werten für die kleinste Differenz.

Tabelle 4-4 gibt eine Übersicht darüber, welches Verfahren für welche Bruchkurve angewendet wird.

Tabelle 4-4 Übersicht über die Lösungswege zur Bestimmung des Schnittpunktes mit der Bruchkurve

	$\tau_{21}(\sigma_1)$	$\tau_{21}(\sigma_2)$	$\sigma_2(\sigma_1)$	$\tau_{32}(\sigma_3)$	$\sigma_2(\sigma_3)$
Analytisch	X		X		X
Geometrisch		X		X	

Der Reservefaktor f ist als Längenverhältnis definiert. Er setzt die Distanz zwischen dem Nullpunkt und dem Schnittpunkt auf der Bruchkurve ins Verhältnis mit der zwischen dem Nullpunkt und dem Datenpaar. Mathematisch formuliert, sieht der Zusammenhang folgendermaßen aus:

$$f = \frac{\overline{(0,0)(x_{SP}, y_{SP})}}{\overline{(0,0)(x_{DP}, y_{DP})}} = \frac{\sqrt{x_{SP}^2 + y_{SP}^2}}{\sqrt{x_{DP}^2 + y_{DP}^2}} \quad (29)$$

In dieser Formulierung bezeichnen die Indizes „SP“ den Schnittpunkt und „DP“ das Datenpaar. Der Reservefaktor ist also der Faktor, mit dem die Länge des Ortsvektors der Spannungskombination multipliziert werden muss, um die Bruchkurve zu schneiden. Ist $f > 1$ befindet sich der zu prüfende Spannungstensor innerhalb der Bruchfläche und führt somit nicht zu einem Materialversagen. Ist $f < 1$ tritt Versagen ein. Für den Fall, dass $f = 1$ liegt die Spannungskombination direkt auf der Bruchkurve.

4.3.1. Berechnung für Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$

Wie bereits in Abschnitt 4.2. erfolgt, wird das generelle Vorgehen zur Bestimmung des Schnittpunktes an der Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_1)$ exemplarisch und detailliert vorgestellt. Auf die fallspezifischen Anpassungen wird in den entsprechenden Abschnitten eingegangen. In diesem Fall kann der Schnittpunkt analytisch bestimmt werden.

Als erstes wird eine Geradengleichung für den ersten Quadranten erstellt, die im Nullpunkt startet ($b = 0$) und die gewünschte Kombination aus $\sigma_1 \geq 0$ (allgemein bezeichnet als $\sigma_{1,E}$) und τ_{21} (allgemein bezeichnet als $\tau_{21,E}$) in Form der Steigung ($m = \tau_{21,E}/\sigma_{1,E}$) beinhaltet (Index „E“ steht für Eingabe):

$$f(x) = mx + b \rightarrow f(\sigma_1) = \frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \quad (30)$$

Um den Schnittpunkt aus dieser Geradengleichung und der Bruchkurve (vgl. Gleichung 9) zu erhalten, werden beide Funktionen gleichgesetzt und nach $\sigma_{1,SP}$ umgestellt:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_{1,SP} &= R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} & (31a-d) \\ \rightarrow \left(\frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)} \sigma_{1,SP}\right)^m &= 1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1,t)}\right)^m \\ \rightarrow \left(\frac{\tau_{21,E} \cdot R(1,t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)}\right)^m \sigma_{1,SP}^m &= R(1,t)^m - \sigma_{1,SP}^m \\ \rightarrow \sigma_{1,SP} &= \left(\frac{R(1,t)^m}{\left(\frac{\tau_{21,E} \cdot R(1,t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)}\right)^m + 1}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ für } \sigma_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert für $\sigma_{1,SP}$ in die Bruchkurve (Gleichung 9) ein, erhält man den zugehörigen Wert für $\tau_{21,SP}$:

$$\tau_{21,SP} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{R(1,t)} \left(\frac{R(1,t)^m}{\left(\frac{\tau_{21,E} \cdot R(1,t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)}\right)^m + 1}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \text{ für } \sigma_1 \geq 0 \quad (32)$$

Wendet man dieses Vorgehen ohne Änderungen auf den zweiten Quadranten an, führt dies zu einem Problem. Auf der rechten Seite in Gleichung 31c würde nicht $\sigma_{1,SP}$ mit „m“ potenziert werden, sondern $(-\sigma_{1,SP})$. Dies führt dazu, dass die beiden $\sigma_{1,SP}$ nicht ausgeklammert und somit nicht zusammengefasst werden können, und es keine analytische Lösung gibt.

Spiegelt man allerdings sowohl die Bruchkurve als auch die Geradengleichung an der τ_{21} -Achse in den ersten Quadranten, bildet den Schnittpunkt dort und spiegelt das Ergebnis zurück, ist eine analytische Lösung möglich.

$$\frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} < 0 \text{ und } \sigma_1 < 0 \xrightarrow{\text{Spiegeln}} \frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} > 0 \text{ und } \sigma_1 > 0 \quad (33a-b)$$

$$R(2,1) \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \text{ mit } \sigma_1 < 0 \xrightarrow{\text{Spiegeln}} R(2,1) \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \text{ mit } \sigma_1 > 0$$

Gleichsetzten von Gleichung 33a und b ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_{1,SP} &= R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} & (34a-d) \\ \rightarrow \left(\frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)} \sigma_{1,SP} \right)^m &= 1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1,c)} \right)^m \\ \rightarrow \left(\frac{\tau_{21,E} \cdot R(1,c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)} \right)^m \sigma_{1,SP}^m &= R(1,c)^m - \sigma_{1,SP}^m \\ \rightarrow \sigma_{1,SP} &= \left(\frac{R(1,c)^m}{\left(\frac{\tau_{21,E} \cdot R(1,c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)} \right)^m + 1} \right)^{\frac{1}{m}} \text{ für } \sigma_1 < 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Gleichung 34d ist die σ_1 -Koordinate des Schnittpunktes im ersten Quadranten. Durch Multiplikation mit (-1) erfolgt die Spiegelung zurück in den zweiten Quadranten. Die τ_{21} -Koordinate des Schnittpunktes erhält man wie in Gleichung 32 durch Einsetzen von $\sigma_{1,SP}$ in die Gleichung der Bruchkurve (in diesem Fall Gleichung 10):

$$\tau_{21,SP} = R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{R(1,c)} \left(\frac{R(1,c)^m}{\left(\frac{\tau_{21,E} \cdot R(1,c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2,1)} \right)^m + 1} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (35)$$

Durch Einsetzen von $\sigma_{1,E}$ und $\tau_{21,E}$ in Gleichung 5 und Nullsetzen der übrigen Spannungen lässt sich die Anstrengung des Datenpaares berechnen. In Abschnitt 4.2.1. wurden bereits die aktiven Anstrengungen für diese Bruchkurve hergeleitet, sodass hier folgt:

für $\sigma_1 \geq 0$: $Eff^{(res)m} = Eff(FF1)^m + Eff(IFF3)^m$ (36a-d)

$$\rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{1,E}}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21,E}}{R(2,1)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 < 0$: $Eff^{(res)m} = Eff(FF2)^m + Eff(IFF3)^m$

$$\rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{-\sigma_{1,E}}{R(1,c)} \right)^m + \left(\frac{\tau_{21,E}}{R(2,1)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Der Reservefaktor ergibt sich nach Gleichung 29 für beide Quadranten zu:

$$f = \frac{\sqrt{\sigma_{1,SP}^2 + \tau_{21,SP}^2}}{\sqrt{\sigma_{1,E}^2 + \tau_{21,E}^2}} \quad (37)$$

4.3.2. Berechnung für Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$

Für die Berechnung zur Bruchkurve $\tau_{21}(\sigma_2)$ wird wie im vorherigen Abschnitt eine Geradengleichung für den ersten Quadranten erstellt, die im Nullpunkt startet ($b = 0$) und die gewünschte Kombination aus $\sigma_2 \geq 0$ (bezeichnet als $\sigma_{2,E}$) und τ_{21} (bezeichnet als $\tau_{21,E}$) in Form der Steigung ($m = \tau_{21,E}/\sigma_{2,E}$) beinhaltet (Index „E“ steht für Eingabe):

$$f(x) = mx + b \rightarrow f(\sigma_2) = \frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 \quad (38)$$

Um den Schnittpunkt der Geraden mit der Bruchkurve zu bestimmen, werden die Funktionen (vgl. Gleichung 14a und Gleichung 38) gleichgesetzt:

$$\frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_{2,SP} = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{b_{21}^2 \sigma_{2,SP}^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_{2,SP}}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2,T)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (39a-b)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{\left(\frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_{2,SP} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{b_{21}^2 \sigma_{2,SP}^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_{2,SP}} \right)}{R(2,1)^3}} = \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Gleichung 39b kann aufgrund der Potenzen nicht nach $\sigma_{2,SP}$ umgeformt werden, weshalb eine geometrische Bestimmung des Schnittpunktes erfolgt. Dabei werden die τ_{21} -Werte über das gesamte positive σ_2 -Intervall mit kleiner Schrittweite unter Verwendung der Gleichung 14a sowie Gleichung 38 berechnet und die Differenzen aus den Schubspannungen gebildet.

Der Ordinatenwert auf der Bruchkurve mit der kleinsten Differenz zur Geraden wird dann als Schnittpunktordinate $\tau_{21,SP}$ festgelegt. Die zugehörige Schnittpunktordinate $\sigma_{2,SP}$ ist der entsprechende Abszissenwert. Abbildung 4–14 visualisiert die geometrische Schnittpunktbestimmung skizzenhaft.

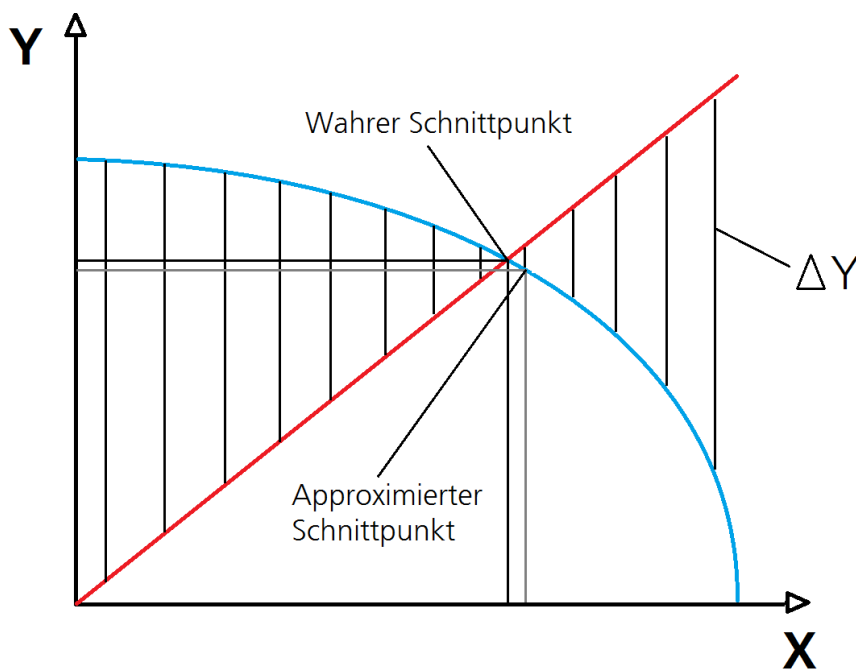


Abbildung 4–14 Skizzenhafte Darstellung des geometrischen Verfahrens zur Schnittpunktbestimmung. Die blaue Kurve symbolisiert die Bruchkurve, die rote Gerade stellt die bis zur Festigkeit verlängerte Gerade (verlängerter Ortsvektor der Spannungscombination) dar.

Für die Berechnung des Schnittpunktes im zweiten Quadranten wird ebenfalls eine Geradengleichung, wie in Gleichung 38, aufgestellt, mit dem Unterschied, dass sowohl σ_2 als auch $\sigma_{2,E}$ negative Werte annehmen. Gleichsetzen der Geradengleichung mit der im Druckbereich definierten Bruchkurve aus Gleichung 14b ergibt:

$$\frac{\tau_{21,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_{2,SP} = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{b_{21}^2 \sigma_{2,SP}^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_{2,SP}}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_{2,SP}}{R(2,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad (40)$$

Aus denselben Gründen wie für Gleichung 39b ist keine Umstellung nach $\sigma_{2,SP}$ möglich. Folglich wird auch in diesem Quadranten eine geometrische Schnittpunktbestimmung durchgeführt, wie sie bereits für den ersten Quadranten erfolgt ist und beschrieben wurde.

Für die Berechnung der Anstrengung wird Gleichung 5 herangezogen. Nullsetzen aller Spannungen außer σ_2 und τ_{21} sowie Einsetzen der Schnittpunktkoordinaten liefert:

für $\sigma_2 \geq 0$: $Eff^{(res)m} = Eff(IFF1)^m + Eff(IFF3)^m$ (41a-d)

$$\rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2,t)} \right)^m + \left(\tau_{21,E} \sqrt{\frac{b_{22}^2 \sigma_{2,E}^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_{2,E}}{R(2,1)^3}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_2 < 0$: $Eff^{(res)m} = Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m$

$$\rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{-\sigma_{2,E}}{R(2,c)} \right)^m + \left(\tau_{21,E} \sqrt{\frac{b_{22}^2 \sigma_{2,E}^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_{2,E}}{R(2,1)^3}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Der Reservefaktor ergibt sich nach Gleichung 29 für beide Quadranten zu:

$$f = \frac{\sqrt{\sigma_{2,SP}^2 + \tau_{21,SP}^2}}{\sqrt{\sigma_{2,E}^2 + \tau_{21,E}^2}} \quad (42)$$

4.3.3. Berechnung für Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$

Die Geradengleichungen der Ortsvektoren der Spannungscombinationen in den vier Quadranten der Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_1)$ lauten nach dem Vorbild von Abschnitt 4.3.1.:

1. Quadrant: $f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1$ mit $\sigma_1 \geq 0, \sigma_{1,E} \geq 0$ und $\sigma_{2,E} \geq 0$ (43a-d)

2. Quadrant: $f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1$ mit $\sigma_1 < 0, \sigma_{1,E} < 0$ und $\sigma_{2,E} \geq 0$

3. Quadrant: $f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1$ mit $\sigma_1 < 0, \sigma_{1,E} < 0$ und $\sigma_{2,E} < 0$

4. Quadrant: $f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1$ mit $\sigma_1 \geq 0, \sigma_{1,E} \geq 0$ und $\sigma_{2,E} < 0$

Gleichsetzen der Bruchkurvenfunktionen (Gleichung 16a-d) mit den zugehörigen Geradengleichungen 43a-d führt zu demselben Problem wie in Abschnitt 4.3.1., dass ohne Spiegelung keine analytischen Lösungen gefunden werden können, da die mit unterschiedlichen Vorzeichen und mit m potenzierten Variablen nicht zusammengefasst werden können.

Nach der Spiegelung (2. Quadrant an der σ_2 -Achse, 4. Quadrant an der σ_1 -Achse und 3. Quadrant an beiden Achsen) in den ersten Quadranten ergeben sich folgende Schnittpunktkoordinaten für $\sigma_{1,SP}$ (vgl. Anhang B-a):

$$1. \text{ Quadrant: } \sigma_{1,SP} = \left(\frac{R(1, t)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (44a-d)$$

$$2. \text{ Quadrant: } \sigma_{1,SP} = - \left(\frac{R(1, c)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{-\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$3. \text{ Quadrant: } \sigma_{1,SP} = - \left(\frac{R(1, c)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$4. \text{ Quadrant: } \sigma_{1,SP} = \left(\frac{R(1, t)^m}{1 + \left(\frac{-\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Einsetzen der Gleichungen 44a-d in die Bruchkurven (vgl. Gleichungen 16a-d) ermöglicht die Berechnung der zu $\sigma_{1,SP}$ gehörenden Schnittpunktkoordinaten auf der Ordinate, $\sigma_{2,SP}$:

$$1. \text{ Quadrant: } \sigma_{2,SP} = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{R(1, t)} \cdot \left(\frac{R(1, t)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (45a-d)$$

$$2. \text{ Quadrant: } \sigma_{2,SP} = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{R(1, c)} \cdot \left(\frac{R(1, c)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{-\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{3. Quadrant:} \quad \sigma_{2,SP} &= -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{R(1, c)} \cdot \left(\frac{R(1, c)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \\
 \text{4. Quadrant:} \quad \sigma_{2,SP} &= -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{R(1, t)} \cdot \left(\frac{R(1, t)^m}{1 + \left(\frac{-\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)} \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

Die Anstrengungen für die wirkende Spannungskombination können über Gleichung 5 bestimmt werden, indem alle nicht aktiven Spannungen zu Null gesetzt und die benutzerdefinierten Spannungen an Stelle von σ_1 und σ_2 verwendet werden:

$$\text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0: \quad Eff^{(res)m} = Eff(FF1)^m + Eff(IFF1)^m \quad (46a-h)$$

$$\rightarrow \quad Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{1,E}}{R(1, t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 \geq 0: \quad Eff^{(res)m} = Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m$$

$$\rightarrow \quad Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{-\sigma_{1,E}}{R(1, c)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{für } \sigma_1 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0: \quad Eff^{(res)m} = Eff(FF2)^m + Eff(IFF2)^m$$

$$\rightarrow \quad Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{-\sigma_{1,E}}{R(1, c)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_{2,E}}{R(2, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{für } \sigma_1 \geq 0 \text{ und } \sigma_2 < 0: \quad Eff^{(res)m} = Eff(FF1)^m + Eff(IFF2)^m$$

$$\rightarrow \quad Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{1,E}}{R(1, t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_{2,E}}{R(2, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Der Reservefaktor ergibt sich nach Gleichung 29 für alle Quadranten zu:

$$f = \frac{\sqrt{\sigma_{1,SP}^2 + \sigma_{2,SP}^2}}{\sqrt{\sigma_{1,E}^2 + \sigma_{2,E}^2}} \quad (47)$$

4.3.4. Berechnung für Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$

Die Berechnung des Schnittpunktes für die Bruchkurve $\tau_{32}(\sigma_3)$ kann nicht analytisch bestimmt werden, da es nicht möglich ist eine Lösung für die Bruchkurvenfunktion herzuleiten (vgl. Abschnitt 4.2.4.). Aus diesem Grund erfolgt die Schnittpunktbestimmung für diese Bruchkurve, wie für $\tau_{21}(\sigma_2)$, geometrisch. Die Geraden mit Steigung $m = \tau_{32,E}/\sigma_{3,E}$ und Ordinatenabschnitt $b = 0$ für den ersten und zweiten Quadranten lauten:

$$\text{für } \sigma_3 \geq 0: \quad f(x) = mx + b \rightarrow f(\sigma_3) = \frac{\tau_{32,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_{3,E} \geq 0 \text{ und } \tau_{32,E} \geq 0 \quad (48a-b)$$

$$\text{für } \sigma_3 < 0: \quad f(x) = mx + b \rightarrow f(\sigma_3) = \frac{\tau_{32,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \tau_{32,E} \geq 0$$

Die zugehörigen Anstrengungen können durch Einsetzen von $\sigma_{3,E}$ und $\tau_{32,E}$ in Gleichung 5 und Nullsetzen der Spannungen σ_1 , σ_2 , τ_{21} und τ_{31} bestimmt werden. Die aktiven Anstrengungen sind in Gleichung 18 zu sehen und werden hier für die benutzerdefinierten Spannungen angepasst:

$$Eff^{(res)m} = Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \quad (49)$$

$$\rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{3,E} + \sqrt{4\tau_{32,E}^2 + (-\sigma_{3,E})^2}}{2R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{4\tau_{32,E}^2 + (-\sigma_{3,E})^2} + (b_{22} - 1)\sigma_{3,E}}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Der Reservefaktor ergibt sich nach Gleichung 29 für beide Quadranten zu:

$$f = \frac{\sqrt{\sigma_{3,SP}^2 + \tau_{32,SP}^2}}{\sqrt{\sigma_{3,E}^2 + \tau_{32,E}^2}} \quad (50)$$

4.3.5. Berechnung für Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$

Die Berechnung des Schnittpunktes aus dem verlängerten Ortsvektor der benutzerdefinierten Spannungscombination und der Bruchkurve $\sigma_2(\sigma_3)$ erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie in Abschnitt 4.3.1., jedoch mit einer kleinen Besonderheit. Da für den ersten und dritten Quadranten nicht nur jeweils eine, sondern zwei Funktionen verwendet werden (vgl. Abschnitt 4.2.5.), muss eine zusätzliche Fallunterscheidung durchgeführt werden, die zwischen Steigungen ($m = \sigma_{2,E}/\sigma_{3,E}$) größer oder kleiner als Eins differenziert, also ob die Funktion ober- oder unterhalb der 45°-Linie durch den Ursprung liegt. Im zweiten und vierten Quadranten können die Schnittpunkte wie zuvor berechnet werden.

Die Gleichungen für die Geraden lauten wie in Abschnitt 4.3.3., wobei die Umkehrfunktionen der Geraden für den ersten, und zweiten Quadranten später ebenfalls zur Berechnung benötigt werden:

$$\begin{aligned}
 & f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_3 \geq 0, \sigma_{3,E} \geq 0, \sigma_{2,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{3,E} \geq \sigma_{2,E} \\
 \text{1. Quadrant:} \quad & f(\sigma_2) = \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 \text{ mit } \sigma_2 \geq 0, \sigma_{3,E} \geq 0, \sigma_{2,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{3,E} < \sigma_{2,E}
 \end{aligned} \tag{51a-f}$$

$$\begin{aligned}
 & f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_3 < 0, \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0 \\
 \text{2. Quadrant:} \quad & f(\sigma_2) = \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 \text{ mit } \sigma_2 \geq 0, \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{3. Quadrant:} \quad f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_3 < 0, \sigma_{3,E} < 0, \sigma_{2,E} < 0 \text{ und } \sigma_{3,E} < \sigma_{2,E}$$

$$\text{4. Quadrant:} \quad f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_3 \geq 0, \sigma_{3,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} < 0$$

Um den Schnittpunkt im unteren Teil des ersten Quadranten zu bestimmen, wird die Bruchkurvenfunktion aus Gleichung 24a mit Gleichung 51a gleichgesetzt und nach σ_3 bzw. $\sigma_{3,SP}$ aufgelöst (vgl. Anhang B-b):

$$\sigma_{3,SP} = \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \right) \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{52}$$

Für den über der 45°-Linie liegenden Teil kann die Geradengleichung 51a nicht gleich der Bruchkurve aus Gleichung 24b gesetzt werden, da die Bruchkurvenfunktion nicht nach σ_2 umgestellt werden kann und somit ein Gleichsetzen der beiden Funktionen nicht möglich ist. Um den Schnittpunkt dennoch bestimmen zu können, wird die Umkehrfunktion der Geradengleichung gebildet (vgl. Gleichung 51b) und gleich der Bruchkurvenfunktion gesetzt. Es ergibt sich die Schnittpunktkoordinate $\sigma_{2,SP}$ (vgl. Anhang B-b):

$$\sigma_{2,SP} = \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \right) \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{53}$$

Um den Schnittpunkt im vierten Quadranten bestimmen zu können, müssen die Gerade und die Bruchkurve in den ersten Quadranten gespiegelt werden. Der Grund dafür ist, dass ansonsten die Terme $\sigma_{2,SP}^m$ und $(-\sigma_{2,SP})^m$ nicht zusammengefasst werden können (vgl. Abschnitt 4.3.1.). Da die Funktion für die Bruchkurve im vierten Quadranten (Gleichung 24c) der aus dem ersten Quadranten (Gleichung 24a) entspricht und die Geradengleichungen nach dem Spiegeln ebenfalls gleich sind (vgl. Gleichungen 51a und 51f), gilt die Gleichung für den Schnittpunkt (vgl. Gleichung 52) sowohl im ersten als auch im vierten Quadranten.

Ähnliches gilt für den Schnittpunkt im zweiten Quadranten. Zunächst werden die Umkehrfunktionen der Geraden (vgl. Gleichung 51d) und der Bruchkurve gebildet (vgl. Gleichung 54):

$$g(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad (54)$$

$$\rightarrow \tilde{g}(\sigma_2) = (2b_{22} - 1)\sigma_2 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

Anschließend werden beide Funktionen durch Multiplikation mit (-1) an der σ_2 -Achse in den ersten Quadranten gespiegelt:

$$f(\sigma_2) = \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 \text{ mit } \sigma_2 \geq 0, \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0 \quad (55a-d)$$

$$\xrightarrow{\text{Spiegeln}} \tilde{f}(\sigma_2) = \frac{-\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 \text{ mit } \sigma_2 \geq 0, \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0$$

$$\tilde{g}(\sigma_2) = (2b_{22} - 1)\sigma_2 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\xrightarrow{\text{Spiegeln}} \tilde{\tilde{g}}(\sigma_2) = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} - (2b_{22} - 1)\sigma_2$$

Als letztes folgt das Gleichsetzen und die Umstellung nach σ_2 bzw. $\sigma_{2,SP}$:

$$\tilde{f}(\sigma_2) = \frac{-\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_{2,SP} = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} - (2b_{22} - 1)\sigma_{2,SP} = \tilde{\tilde{g}}(\sigma_2) \quad (56)$$

$$\rightarrow \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right) \sigma_{2,SP} = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}}{R(2, c)}\right)^m \sigma_{2,SP}^m = 1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad R(2, t)^m &= \sigma_{2,SP}^m + \left(\frac{2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}}{R(2, c)} \right)^m \sigma_{2,SP}^m \\ \rightarrow \quad \sigma_{2,SP} &= \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \right) \right)^m} \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist die Schnittpunktkoordinate auf der σ_2 -Achse. Es fällt auf, dass diese Gleichung mit Gleichung 53 identisch ist. Der Grund dafür ist, dass die Umkehrfunktionen der Bruchkurvenfunktionen in beiden Quadranten gleich sind.

Um die Schnittpunkte im dritten Quadranten zu bestimmen, muss aus dem Grund, dass zwei Funktionen auftauchen, eine Fallunterscheidung, wie für den ersten Quadranten, durchgeführt werden. Da es sich in diesem Bereich um eine offenen Bruchfläche handelt (vgl. Abbildung 4–11 bis 4–13), muss ein zusätzlicher Fall betrachtet werden, bei dem die Steigung der aus den benutzerdefinierten Spannungen generierten Geradengleichung zwischen denen der Bruchkurvenfunktionen liegt, also niemals die Bruchkurve schneidet. Die Steigungen lauten:

$$\begin{aligned} \text{für } \sigma_3 < \sigma_2: \quad m &= 2b_{22} - 1 \\ \text{für } \sigma_3 > \sigma_2: \quad m &= \frac{1}{2b_{22} - 1} \end{aligned} \quad (57a-b)$$

Für den Fall, dass die Steigung $m = \sigma_{2,E}/\sigma_{3,E}$ größer als die aus Gleichung 57a sein sollte, befindet sich der Schnittpunkt mit der Bruchkurve unterhalb der 45°-Line durch den Ursprung. Gleichsetzen der Geradengleichung (vgl. Gleichung 51e) mit der Bruchkurvenfunktion (vgl. Gleichung 27c) ergibt (vgl. Anhang B-b):

$$\sigma_{3,SP} = \frac{R(2, c)}{2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}} \quad (58)$$

Ist die Steigung $m = \sigma_{2,E}/\sigma_{3,E}$ kleiner als die aus Gleichung 57b, befindet sich der Schnittpunkt mit der Bruchkurve oberhalb der 45°-Linie. Gleichsetzen der Geradengleichung (vgl. Gleichung 51e) mit der Bruchkurvenfunktion (vgl. Gleichung 27d) ergibt:

$$\sigma_{3,SP} = \frac{R(2, c)}{\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} - 1} \quad (59)$$

Liegt die Steigung m zwischen den Werten aus Gleichung 57a und 57b, oder ist gleich groß wie einer der Werte, existiert kein Schnittpunkt mit der Bruchkurve. Das Resultat ist, dass der Reservefaktor nicht definiert bzw. unendlich groß und die Anstrengung gleich Null ist.

Um die Reservefaktoren und Anstrengungen für die Schnittpunkte zu bestimmen, müssen zuerst die fehlenden Schnittpunktkoordinaten berechnet werden. Dazu können einfach die bereits berechneten Schnittpunktkoordinaten (vgl. Gleichungen 52, 53, 56, 58 und 59) in die Bruchkurven (vgl. Gleichungen 24a-f bzw. Gleichung 25) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 \geq 0 \\ &\text{und } \sigma_2 \geq 0 \\ &\text{mit } \sigma_3 \geq \sigma_2: \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sigma_{2,SP} &= (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{3,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \\ \text{mit } \sigma_{3,SP} &= \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)}\left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}\right)\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \quad (60a-f)$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 \geq 0 \\ &\text{und } \sigma_2 \geq 0 \\ &\text{mit } \sigma_3 < \sigma_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sigma_{3,SP} &= (2b_{22} - 1)\sigma_2 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \\ \text{mit } \sigma_{2,SP} &= \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)}\left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right)\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 < 0 \\ &\text{und } \sigma_2 \geq 0: \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sigma_{3,SP} &= (2b_{22} - 1)\sigma_2 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \\ \text{mit } \sigma_{2,SP} &= \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)}\left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right)\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 \geq 0 \\ &\text{und } \sigma_2 < 0: \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sigma_{2,SP} &= (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{3,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \\ \text{mit } \sigma_{3,SP} &= \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)}\left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}\right)\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 < 0 & \sigma_{2,SP} &= (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{3,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \\ &\text{und } \sigma_2 < 0 & & \\ &\text{mit } \sigma_3 < \sigma_2: & \text{mit } \sigma_{3,SP} &= \frac{R(2, c)}{2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 < 0 & \sigma_{2,SP} &= (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{3,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \\ &\text{und } \sigma_2 < 0 & & \\ &\text{mit } \sigma_3 > \sigma_2: & \text{mit } \sigma_{3,SP} &= \frac{R(2, c)}{\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} - 1} \end{aligned}$$

Die zugehörigen Anstrengungen können durch Einsetzen von $\sigma_{3,E}$ und $\sigma_{2,E}$ in Gleichung 5 und Nullsetzen der Spannungen σ_1 , τ_{21} , τ_{31} und τ_{32} bestimmt werden:

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 \geq 0 & Eff^{(res)} &= (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\ &\text{und } \sigma_2 \geq 0 & & \\ &\text{mit } \sigma_3 > \sigma_2: & \rightarrow Eff^{(res)} &= \left(\left(\frac{\sigma_{3,E}}{R(2, t)}\right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_{3,E} - \sigma_{2,E}}{R(2, c)}\right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \quad (61a-h)$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 \geq 0 & Eff^{(res)} &= (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\ &\text{und } \sigma_2 \geq 0 & & \\ &\text{mit } \sigma_3 < \sigma_2 & \rightarrow Eff^{(res)} &= \left(\left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2, t)}\right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_{2,E} - \sigma_{3,E}}{R(2, c)}\right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{für } \sigma_3 \geq 0 & Eff^{(res)} &= (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\ &\text{und } \sigma_2 \geq 0 & & \\ &\text{mit } \sigma_3 = \sigma_2 & \rightarrow Eff^{(res)} &= \left(\left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2, t)}\right)^m + \left(\frac{2(b_{22} - 1)\sigma_{2,E}}{R(2, c)}\right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \sigma_3 < 0 \\
 &\text{und } \sigma_2 \geq 0: \\
 &\quad Eff^{(res)} = (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\
 &\quad \rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22}-1)\sigma_{2,E} - \sigma_{3,E}}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \sigma_3 \geq 0 \\
 &\text{und } \sigma_2 < 0: \\
 &\quad Eff^{(res)} = (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\
 &\quad \rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{3,E}}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22}-1)\sigma_{3,E} - \sigma_{2,E}}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \sigma_3 < 0 \\
 &\text{und } \sigma_2 < 0 \\
 &\text{mit } \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} > 2b_{22} - 1: \\
 &\quad Eff^{(res)} = (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\
 &\quad \rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{2,E}}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22}-1)\sigma_{2,E} - \sigma_{3,E}}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \sigma_3 < 0 \\
 &\text{und } \sigma_2 < 0 \\
 &\text{mit } \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} < \frac{1}{2b_{22}-1}: \\
 &\quad Eff^{(res)} = (Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m)^{\frac{1}{m}} \\
 &\quad \rightarrow Eff^{(res)} = \left(\left(\frac{\sigma_{3,E}}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22}-1)\sigma_{3,E} - \sigma_{2,E}}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \sigma_3 < 0 \text{ und } \sigma_2 < 0 \\
 &\text{mit } \frac{1}{2b_{22}-1} \leq \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \leq 2b_{22} - 1: \\
 &\quad Eff^{(res)} = 0
 \end{aligned}$$

Der Reservefaktor ergibt sich nach Gleichung 29 für beide Quadranten zu:

$$f = \frac{\sqrt{\sigma_{3,SP}^2 + \sigma_{2,SP}^2}}{\sqrt{\sigma_{3,E}^2 + \sigma_{2,E}^2}} \quad (62)$$

4.4. Erstellung des Bruchkörpers

Um einen Bruchkörper darzustellen werden drei Achsen, also drei Spannungen benötigt. Wie zuvor bei den Bruchkurven dient auch hier die Gleichung für die Gesamtanstrengung als Grundlage (vgl. Gleichung 5).

In der GUI wird der Bruchkörper $\tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2)$ dargestellt. Somit werden die Spannungen σ_3 , τ_{31} und τ_{32} gleich Null gesetzt. Setzt man die Gesamtanstrengung gleich Eins (Übergang von Nicht-Versagen zu Versagen) und die nicht wirksamen Spannungen gleich Null folgt:

$$1 = Eff(FF1)^m + Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m \quad (63)$$

Anstrengungen FF1 und FF2 sind Resultate der angreifenden Spannung σ_1 und können nicht gleichzeitig auftreten (vgl. Abschnitt 4.2.1.). Gleiches gilt für die Anstrengungen IFF1 und IFF2, die durch σ_2 hervorgerufen werden. Die Anstrengung IFF3 ist aufgrund von τ_{21} immer aktiv. Da τ_{21} immer quadratisch auftritt (vgl. Gleichungen 3a-e), muss nicht zwischen positiven und negativen Werten unterschieden werden, sodass der Bruchkörper an der σ_1 - σ_2 -Ebene gespiegelt werden kann. Es ergeben sich somit vier Fälle zwischen denen unterschieden werden muss (die Quadranten beziehen sich auf die σ_1 - σ_2 -Ebene):

$$1. \text{ Quadrant:} \quad 1 = Eff(FF1)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF3)^m \quad (64a-d)$$

$$2. \text{ Quadrant:} \quad 1 = Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF3)^m$$

$$3. \text{ Quadrant:} \quad 1 = Eff(FF2)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m$$

$$4. \text{ Quadrant:} \quad 1 = Eff(FF1)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m$$

Nach Einsetzen der Anstrengungen (vgl. Gleichungen 3a-e) und Umstellen nach τ_{21} ergeben sich folgende dreidimensionale Bruchflächen für die einzelnen Quadranten (Abk.: Q) (vgl. Anhang C):

$$1. \text{ Q:} \quad \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad (65a-d)$$

$$2. \text{ Q:} \quad \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$3. Q: \quad \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)}\right)^m - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$4. Q: \quad \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)}\right)^m - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

Abbildung 4–15 zeigt den Bruchkörper in gestaucher Form (oben) und mit gleichen Achsenabschnitten (unten).

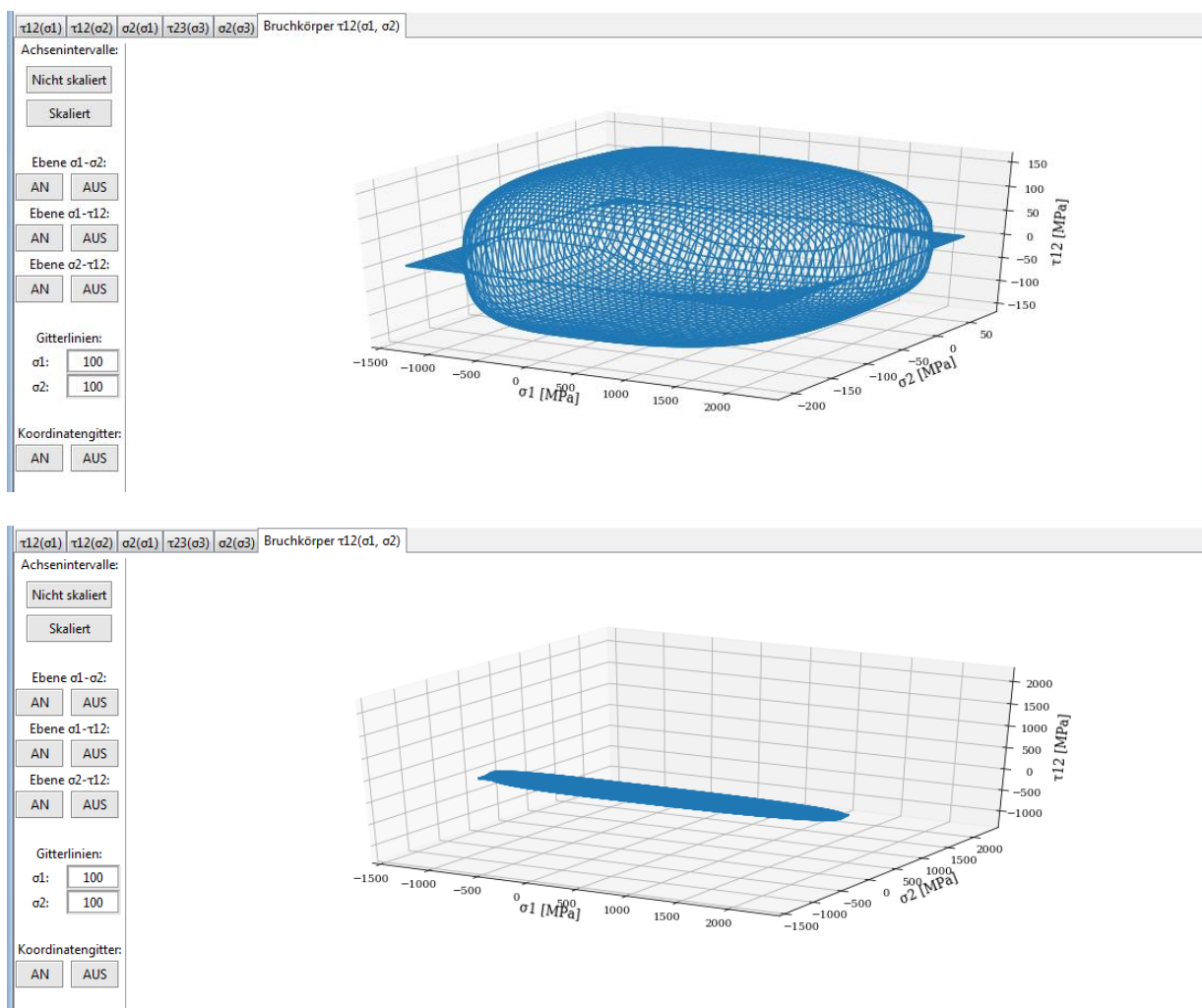


Abbildung 4–15 Darstellung des Bruchkörpers am Beispiel T700/M21 in der gestaucher Ausgangsform oben; mit gleichen Achsenabschnitten unten

5. Zusammenfassung

Dieser Bericht beschäftigt sich mit den Bestandteilen und Funktionen der graphischen Benutzeroberfläche zum Versagenskriterium nach Cuntze und erläutert die Gleichungen, mit Hilfe derer die Materialanstressungen, Bruchkurven und der Bruchkörper berechnet werden.

Nach einer kurzen Einführung in den theoretischen Hintergrund folgt die Beschreibung der einzelnen Elemente der GUI. Anschließend werden die zur Berechnung herangezogenen Gleichungen hergeleitet und erklärt. Die Ergebnisse werden mit anderen Quellen abgeglichen und bewertet. Es stellt sich heraus, dass es mehrere Auslegungsarten der Materialanstressungen bzw. der Interaktion von Modi gibt, sodass für die Bruchkurven $\tau_{21}(\sigma_2)$, $\sigma_2(\sigma_1)$, $\tau_{32}(\sigma_3)$ und $\sigma_2(\sigma_3)$ mehrere Berechnungsmethoden vorgestellt werden. Teilweise widersprechen sich die Darstellungen aus der Literatur, sodass eine Validierung der Ergebnisse aussteht.

V. Literaturverzeichnis

- [1] J.P. Boehler, J. Raclin, *Failure Criteria for Glass-Fibre Reinforced Composites under Confining Pressure*, *Journal of Structural Mechanics*, 1985
- [2] R.G. Cuntze, *Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design*, *Composites Science and Technology*, 2006
- [3] R.G. Cuntze, *The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of UD laminae under static tri-axial stress states*, *WWFE-II*, 2009
- [4] R.G. Cuntze, A. Freund, *The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates*, *Composites Science and Technology*, 2004
- [5] M.J. Hinton, A.S. Kaddour, P.D. Soden, *Failure Criteria in Fibre-Reinforced-Polymer Composites*, *The World.-Wide Failure Exercise*, 2004
- [6] J. Koord, *Grafische Benutzeroberfläche für das Versagenskriterium nach Cuntze im ebenen Spannungszustand*; Interner Bericht DLR-IB-FA-BS-2018-117, 2018
- [7] E. Petersen, *Kritische Betrachtung der Versuchsmöglichkeiten zur Bestimmung der Elastizitätsgrößen, Festigkeits- und Reibungswerte für den transversal-isotropen Werkstoff*, Interner Bericht IB 131-2013/33, DLR FA-FLB, 2013
- [8] E. Petersen, *Das Cuntze Failure Mode Concept – Theorie*, Interner Bericht IB 131-2013/25, DLR FA, 2013
- [9] E. Petersen, R.G. Cuntze, C. Hühne, *Experimental determination of material parameters in Cuntze's Failure-Mode-Concept-based DU strength failure conditions*, *Composites Science and Technology*, 2016
- [10] M. Schollenberger, E. Petersen, *Das Cuntze Failure Mode Concept – Implementierung über Visual Basic in Microsoft Excel*, interner Bericht, 2014
- [11] M. Schollenberger, E. Petersen, *Cuntze Failure Mode Concept-3D-Erweiterung.xls*; Excel-Tool, 2017
- [12] P.D. Soden, M.J. Hinton, A.S. Kaddour, *Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates*, *Composites Science and Technology* 58, 1998
- [13] <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.fsolve.html#scipy.optimize.fsolve> (abgerufen am 12.11.2018)

Anhang A - Bruchkurven

a) $\tau_{21}(\sigma_1)$:

für $\sigma_1 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF1)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{4R(2,1)^2 \cdot \tau_{21}^4}{2R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \sqrt{\frac{2R(2,1) \cdot \tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_1) &= R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF2)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{4R(2,1)^2 \cdot \tau_{21}^4}{2R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \sqrt{\frac{2R(2,1) \cdot \tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_1) &= R(2,1) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

b) $\tau_{21}(\sigma_2)$:

Mit Anpassung:

für $\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow \quad 1 &= \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{4b_{21}^2\sigma_2^2\tau_{21}^4 + 4R(2,1)^2\tau_{21}^4} + 2b_{21}\sigma_2\tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \quad \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21}\sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \quad \tau_{21}(\sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21}\sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow \quad 1 &= \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{4b_{21}^2\sigma_2^2\tau_{21}^4 + 4R(2,1)^2\tau_{21}^4} + 2b_{21}\sigma_2\tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \quad \left(1 - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21}\sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \quad \tau_{21}(\sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21}\sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

Ohne Anpassung:

für $\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{4b_{21}^2\sigma_2^2\tau_{21}^4 + 4R(2,1)^2\tau_{21}^4 + 2b_{21}\sigma_2\tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m - \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21}\sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21}\sigma_2}}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m - \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{0}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m + \left(\sqrt{\frac{4b_{21}^2\sigma_2^2\tau_{21}^4 + 4R(2,1)^2\tau_{21}^4 + 2b_{21}\sigma_2\tau_{21}^2}{2R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21}\sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2\sigma_2^2 + R(2,1)^2 + b_{21}\sigma_2}}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

c) $\sigma_2(\sigma_1)$:

Mit Anpassung:

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$:

$$1 = Eff(FF1)^m + Eff(IFF1)^m$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 \geq 0$:

$$1 = Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 < 0$:

$$1 = Eff(FF1)^m + Eff(IFF2)^m$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_1) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$:

$$1 = Eff(FF2)^m + Eff(IFF2)^m$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_1) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Ohne Anpassung:

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF1)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22}-1)\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \\
 \rightarrow 1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m &= \sigma_2^m \left(\frac{R(2,c)^m + R(2,t)^m(2b_{22}-1)^m}{R(2,t)^m \cdot R(2,c)^m} \right) \\
 \rightarrow \sigma_2(\sigma_1) &= \left(\left(\frac{R(2,t)^m \cdot R(2,c)^m}{R(2,c)^m + R(2,t)^m(2b_{22}-1)^m} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m \right) \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22}-1)\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \\
 \rightarrow 1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m &= \sigma_2^m \left(\frac{R(2,c)^m + R(2,t)^m(2b_{22}-1)^m}{R(2,t)^m \cdot R(2,c)^m} \right) \\
 \rightarrow \sigma_2(\sigma_1) &= \left(\left(\frac{R(2,t)^m \cdot R(2,c)^m}{R(2,c)^m + R(2,t)^m(2b_{22}-1)^m} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m \right) \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF1)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{0}{R(2,t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \\
 \rightarrow \sigma_2(\sigma_1) &= -R(2,c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \\
 \rightarrow \quad 1 &= \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m + \left(\frac{0}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \right)^m \\
 \rightarrow \quad \sigma_2(\sigma_1) &= -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

d) $\tau_{23}(\sigma_3)$:

für $\sigma_3 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \\
 \rightarrow \quad 1 &= \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \\
 \xrightarrow{\sigma_3=0 \text{ in IFF2}} \quad 1 &= \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{2b_{22}\tau_{32}}{R(2, c)} \right)^m
 \end{aligned}$$

für $\sigma_3 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m \\
 \rightarrow \quad 1 &= \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \\
 \xrightarrow{\sigma_3=0 \text{ in IFF1}} \quad 1 &= \left(\frac{\tau_{32}}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{4\tau_{32}^2 + (-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m
 \end{aligned}$$

e) $\sigma_2(\sigma_3)$:

Variation 1:

für 1., 3. und 4. Quadranten:

$$1 = Eff(IFF1)^m + Eff(IFF2)^m$$

$$\rightarrow 1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)(\sigma_2 + \sigma_3)}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\xrightarrow{\sigma_3 \geq 0} 1 = \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)} \right)^m$$

$$\rightarrow \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)}$$

$$\rightarrow -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} = \sigma_2 - (2b_{22} - 1)\sigma_3$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Variation 2:

für $\sigma_3 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ mit $\sigma_3 < \sigma_2$:

$$1 = Eff(IFF1)$$

$$\rightarrow 1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{2R(2, t)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_3}{2R(2, t)}$$

$$\rightarrow 1 = \frac{2\sigma_2}{2R(2, t)}$$

$$\rightarrow \sigma_2(\sigma_3) = R(2, t)$$

für $\sigma_3 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ mit $\sigma_3 \geq \sigma_2$:

$$1 = Eff(IFF1)$$

$$\rightarrow 1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{2R(2, t)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_3}{2R(2, t)}$$

$$\rightarrow 1 = \frac{2\sigma_3}{2R(2, t)}$$

$$\rightarrow \sigma_3(\sigma_2) = R(2, t)$$

für $\sigma_3 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ mit $\sigma_3 \geq \sigma_2$:

$$\begin{aligned}
 & 1 = Eff(IFF2) \\
 \rightarrow & 1 = \frac{b_{22}(\sigma_3 - \sigma_2) + (b_{22} - 1)(\sigma_3 + \sigma_2)}{R(2, c)} \\
 \rightarrow & 1 = \frac{(2b_{22} - 1)\sigma_3 - \sigma_2}{R(2, c)} \\
 \rightarrow & -R(2, c) = \sigma_2 - (2b_{22} - 1)\sigma_3 \\
 \rightarrow & \sigma_3(\sigma_2) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c)
 \end{aligned}$$

für $\sigma_3 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ mit $\sigma_3 < \sigma_2$:

$$\begin{aligned}
 & 1 = Eff(IFF2) \\
 \rightarrow & 1 = \frac{b_{22}(\sigma_2 - \sigma_3) + (b_{22} - 1)(\sigma_3 + \sigma_2)}{R(2, c)} \\
 \rightarrow & 1 = \frac{(2b_{22} - 1)\sigma_2 - \sigma_3}{R(2, c)} \\
 \rightarrow & R(2, c) + \sigma_3 = (2b_{22} - 1)\sigma_2 \\
 \rightarrow & \sigma_2(\sigma_3) = \frac{R(2, c) + \sigma_3}{2b_{22} - 1}
 \end{aligned}$$

Variation 3:

für $\sigma_3 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 & 1 = Eff(IFF1)_{\sigma_2} + Eff(IFF1)_{\sigma_3} \\
 \rightarrow & 1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sqrt{(\sigma_2)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{(-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m \\
 \rightarrow & 1 = \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \\
 \rightarrow & \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\sigma_2}{R(2, t)} \\
 \rightarrow & \sigma_2(\sigma_3) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_3 \geq 0$ und $\sigma_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1) + Eff(IFF2) \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_3 + \sqrt{(-\sigma_3)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{(\sigma_2)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_2}{2R(2, t)} \right)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \\
 \rightarrow \sigma_2(\sigma_3) &= -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_3 < 0$ und $\sigma_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF1) + Eff(IFF2) \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_2 + \sqrt{(\sigma_2)^2}}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{(-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{2R(2, t)} \right)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \frac{\sigma_2}{R(2, t)} \\
 \rightarrow \sigma_2(\sigma_3) &= R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_3 < 0$ und $\sigma_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(IFF2)_{\sigma_2} + Eff(IFF2)_{\sigma_3} \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{b_{22}\sqrt{(\sigma_2)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_2}{2R(2, t)} \right)^m + \left(\frac{b_{22}\sqrt{(-\sigma_3)^2} + (b_{22} - 1)\sigma_3}{2R(2, t)} \right)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \frac{-\sigma_2}{R(2, c)} \\
 \rightarrow \sigma_2(\sigma_3) &= -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_3}{R(2, c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

Anhang B - Schnittpunkte

a) $\sigma_2(\sigma_1)$:

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (1. Quadrant):

$$f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0$$

$$g(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_{1,SP} = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = g(\sigma_1)$$

$$\rightarrow \left(\sigma_{1,SP} \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)}\right)^m = 1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1, t)}\right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP}^m \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)}\right)^m = R(1, t)^m - \sigma_{1,SP}^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP} = \left(\frac{R(1, t)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)}\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (2. Quadrant):

$$f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0 \xrightarrow{\text{Spiegeln, } \sigma_1 \geq 0} \tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0$$

$$g(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \xrightarrow{\text{Spiegeln, } \sigma_1 \geq 0} \tilde{g}(\sigma_1) = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_{1,SP} = R(2, t) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \tilde{g}(\sigma_1)$$

$$\rightarrow \left(\sigma_{1,SP} \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)}\right)^m = 1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1, c)}\right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP}^m \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)}\right)^m = R(1, c)^m - \sigma_{1,SP}^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP} = - \left(\frac{R(1, c)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{-\sigma_{1,E} \cdot R(2, t)}\right)^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ (3. Quadrant):

$$f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} < 0 \xrightarrow{\text{Spiegeln, } \sigma_1 \geq 0} \tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0$$

$$g(\sigma_1) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \xrightarrow{\text{Spiegeln, } \sigma_1 \geq 0 \text{ \& } \sigma_2 \geq 0} \tilde{g}(\sigma_1) = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, c)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \tilde{g}(\sigma_1)$$

$$\rightarrow \left(\sigma_{1,SP} \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)}\right)^m = 1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1, c)}\right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP}^m \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)}\right)^m = R(1, c)^m - \sigma_{1,SP}^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP} = - \left(\frac{R(1, c)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, c)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)}\right)^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 < 0$ (4. Quadrant):

$$f(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} < 0 \xrightarrow{\text{Spiegeln, } \sigma_2 \geq 0} \tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 \text{ mit } \sigma_{1,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} \geq 0$$

$$g(\sigma_1) = -R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \xrightarrow{\text{Spiegeln, } \sigma_2 \geq 0} \tilde{g}(\sigma_1) = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\sigma_1) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E}} \sigma_1 = R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \tilde{g}(\sigma_1)$$

$$\rightarrow \left(\sigma_{1,SP} \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)}\right)^m = 1 - \left(\frac{\sigma_{1,SP}}{R(1, t)}\right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP}^m \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)}\right)^m = R(1, t)^m - \sigma_{1,SP}^m$$

$$\rightarrow \sigma_{1,SP} = - \left(\frac{R(1, t)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_{2,E} \cdot R(1, t)}{\sigma_{1,E} \cdot R(2, c)}\right)^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

b) $\sigma_2(\sigma_3)$:

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (1. Quadrant) mit $\sigma_{2,E}/\sigma_{3,E} < 1$ (unterhalb der 45°-Linie):

$$f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ mit } \sigma_{3,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{2,E} < 0$$

$$g(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_3}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = g(\sigma_3)$$

$$\rightarrow R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{3,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}\right) \sigma_{3,SP}$$

$$\rightarrow 1 - \left(\frac{\sigma_{3,SP}}{R(2, t)}\right)^m = \sigma_{3,SP}^m \left(\frac{\left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}\right)^m}{R(2, c)}\right)$$

$$\rightarrow R(2, t)^m = \sigma_{3,SP}^m + \sigma_{3,SP}^m \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}\right)\right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_{3,SP} = \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}\right)\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (1. Quadrant) mit $\sigma_{2,E}/\sigma_{3,E} > 1$ (oberhalb der 45°-Linie):

$$f(\sigma_2) = \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 \text{ mit } \sigma_{2,E} \geq 0 \text{ und } \sigma_{3,E} < 0$$

$$g(\sigma_2) = (2b_{22} - 1)\sigma_2 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow f(\sigma_2) = \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}} \sigma_2 = (2b_{22} - 1)\sigma_2 - R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_2}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = g(\sigma_2)$$

$$\rightarrow R(2, c) \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right) \sigma_{2,SP}$$

$$\rightarrow 1 - \left(\frac{\sigma_{2,SP}}{R(2, t)}\right)^m = \sigma_{2,SP}^m \left(\frac{\left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right)}{R(2, c)}\right)^m$$

$$\rightarrow R(2, t)^m = \sigma_{2,SP}^m + \sigma_{2,SP}^m \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right)\right)^m$$

$$\rightarrow \sigma_{2,SP} = \left(\frac{R(2, t)^m}{1 + \left(\frac{R(2, t)}{R(2, c)} \left(2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{3,E}}{\sigma_{2,E}}\right)\right)^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ (3. Quadrant) mit $\sigma_{2,E}/\sigma_{3,E} > 2b_{22} - 1$ (unterhalb der 45°-Linie):

$$f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ für } \sigma_3 < 0, \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} < 0$$

$$g(\sigma_3) = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c)$$

$$\Rightarrow f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 = (2b_{22} - 1)\sigma_3 - R(2, c) = g(\sigma_3)$$

$$\rightarrow \sigma_{3,SP} = \frac{R(2, c)}{2b_{22} - 1 - \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}}}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ (3. Quadrant) mit $\sigma_{2,E}/\sigma_{3,E} < \frac{1}{2b_{22}-1}$ (oberhalb der 45°-Linie):

$$f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 \text{ für } \sigma_3 < 0, \sigma_{3,E} < 0 \text{ und } \sigma_{2,E} < 0$$

$$g(\sigma_3) = \frac{R(2, c) + \sigma_3}{2b_{22} - 1}$$

$$\Rightarrow f(\sigma_3) = \frac{\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_3 = \frac{R(2, c) + \sigma_3}{2b_{22} - 1} = g(\sigma_3)$$

$$\rightarrow \frac{(2b_{22} - 1)\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} \sigma_{3,SP} - \sigma_{3,SP} = R(2, c)$$

$$\rightarrow \sigma_{3,SP} = \frac{R(2, c)}{\frac{(2b_{22} - 1)\sigma_{2,E}}{\sigma_{3,E}} - 1}$$

Anhang C – Bruchkörper

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (1. Quadrant)

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF1)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 \geq 0$ (2. Quadrant)

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF2)^m + Eff(IFF1)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m + \left(\tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m - \left(\frac{\sigma_2}{R(2,t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 < 0$ und $\sigma_2 < 0$ (3. Quadrant)

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF2)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m + \left(\tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{-\sigma_1}{R(1,c)} \right)^m - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

für $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_2 < 0$ (4. Quadrant)

$$\begin{aligned}
 1 &= Eff(FF1)^m + Eff(IFF2)^m + Eff(IFF3)^m \\
 \rightarrow 1 &= \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m + \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m + \left(\tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \right)^m \\
 \rightarrow \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} &= \tau_{21} \sqrt{\frac{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}{R(2,1)^3}} \\
 \rightarrow \tau_{21}(\sigma_1, \sigma_2) &= \sqrt{\frac{R(2,1)^3}{\sqrt{b_{21}^2 \sigma_2^2 + R(2,1)^2} + b_{21} \sigma_2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_1}{R(1,t)} \right)^m - \left(\frac{-\sigma_2}{R(2,c)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$